FEUP Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Exercícios de
Processamento Adaptativo

Sílvio Abrantes

---

1. Considere um sistema adaptativo genérico no qual a matriz de autocorrelação de entrada vale $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, o vector de correlação é $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}^T$ e $E[d^2(n)] = 42$. O valor quadrático do erro vale $e^2(n) = d^2(n) + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{a}(n) \boldsymbol{a}^T(n) \boldsymbol{c} - 2d(n) \boldsymbol{a}^T(n) \boldsymbol{c}$.

a) Determine o valor óptimo, $\mathbf{c}_{\text{opt}}$, dos coeficientes do filtro.

b) Determine o valor mínimo do erro quadrático médio $E[e^2(n)]$ (suponha que os valores dos coeficientes são constantes).

2. A entrada de um filtro adaptativo transversal com 2 coeficientes é dada por $\frac{1}{2} + \cos\frac{n\pi}{3}$

Deseja-se usar o algoritmo do gradiente, com $\mu = 0{,}65$, para actualizar os coeficientes do filtro. Verifique se o algoritmo fará convergir os coeficientes para o valor óptimo $\mathbf{c}_{\text{opt}}$.

3. Num sistema adaptativo verifica-se que o valor quadrático médio da resposta desejada vale 0,5, a matriz de autocorrelação de entrada é

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

e o vector de correlação cruzada é $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}^T$.

a) Determine os coeficientes óptimos do filtro.

b) Determine o valor mínimo do erro quadrático médio.

c) Se μ = 0,25, determine o vector de coeficientes, $\mathbf{c}(n)$, na iteração n = 10, admitindo que o valor inicial é $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$ e que usa o algoritmo do gradiente.

Nota: caso não tenha determinado o valor pedido na alínea a), considere o valor $\mathbf{c}_{opt} = [0{,}5 \quad 0]^T$.

4. Num sistema adaptativo os dois valores próprios de uma matriz de autocorrelação de entrada, **R**, são $\lambda_1 = 0{,}5$ e $\lambda_2 = 1{,}5$ e o vector próprio normalizado $Q_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$ corresponde a λ_1. O valor quadrático médio do sinal desejado vale 30 e o vector de correlação cruzada é $[1 \quad -4]^T$.

a) Determine a matriz **R**.

b) Acha que 0,8 é um valor razoável para o passo de adaptação do algoritmo do gradiente? Porquê?

c) Determine o valor mínimo do erro quadrático médio.

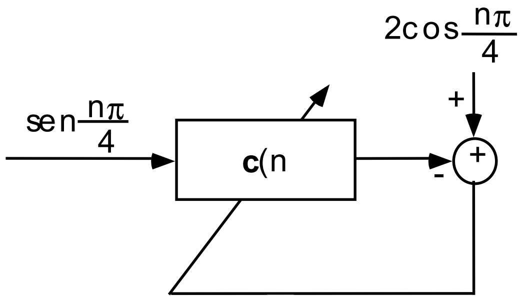
5. À entrada de um filtro transversal adaptativo com dois coeficientes é aplicado o sinal a(n) e ruído branco n(n) de variância σ^2. Sendo os coeficientes do filtro actualizados de acordo com o algoritmo do gradiente, parece-lhe que o passo de adaptação deverá aumentar, diminuir ou manter-se constante, relativamente à situação sem ruído? Justifique quantitativamente.

6. A velocidade de convergência do algoritmo do gradiente está relacionada com os N termos $(1-2\mu\lambda_i)$, i = 1, 2,…, N, em que N é a ordem do filtro adaptativo. Se μ for demasiado elevado um ou mais termos $(1-2\mu\lambda_i)$ serão superiores a 1 e o algoritmo diverge. Por outro lado, para um passo de adaptação fixo, a velocidade de convergência é dominada pelo "modo" mais lento (isto é, o maior valor de $|1-2\mu\lambda_i|$), que dependerá, obviamente, dos valores extremos de λ_i: λ_{min} e λ_{max}. A máxima velocidade de convergência obtém-se, portanto, para um valor óptimo de μ, μ_{opt}, para o qual as funções $|1-2\mu\lambda_{min}|$ e $|1-2\mu\lambda_{max}|$ se cruzam. Nestas condições, mostre que $\mu_{opt} = \dfrac{1}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$.

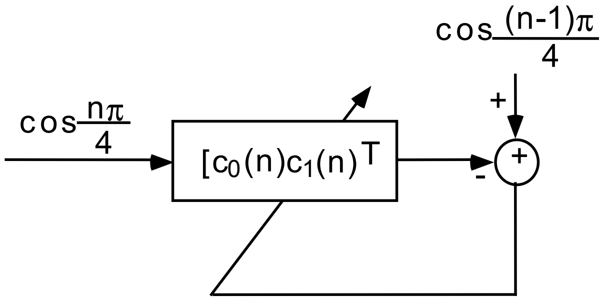
7. Os dois coeficientes do filtro adaptativo da figura são actualizados de acordo com o algoritmo LMS, com um passo de adaptação fixo μ = 0,2.

a) Determine os valores dos coeficientes do filtro nas três primeiras iterações, admitindo que ambos partem do valor nulo.

b) Determine os valores óptimos, $\mathbf{c}_{opt}$, dos coeficientes do filtro.



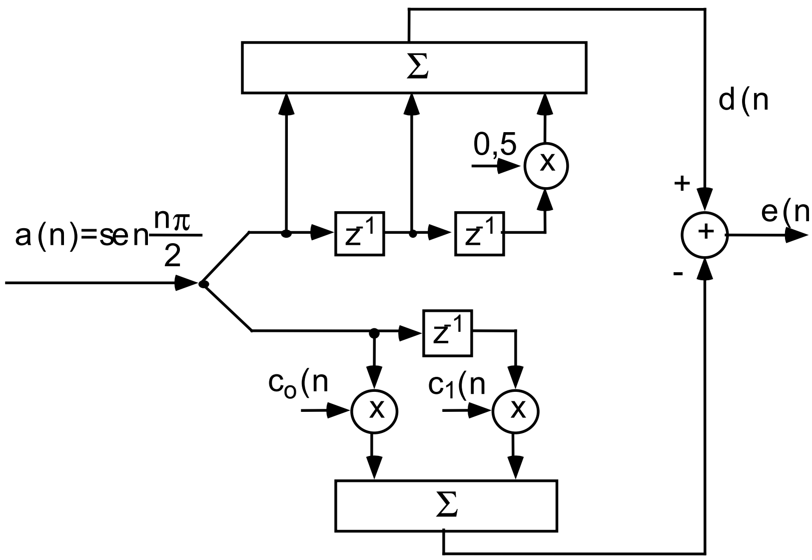
8. Considere o esquema adaptativo da figura. Os coeficientes do filtro adaptativo são actualizados de acordo com o algoritmo LMS.



a) Determine a gama de valores do passo de adaptação que garante convergência do algoritmo.

b) Sendo $\mu = 0{,}25$, determine o valor médio de $c_1(30)$ e compare-o com $c_{opt,1}$, em que $\boldsymbol{c}_{opt} = [c_{opt,o} \quad c_{opt,1}]^T$, supondo que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$.

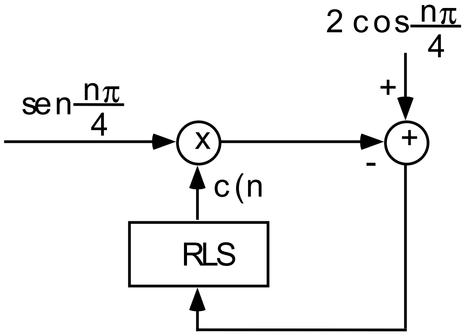
9. Considere o esquema seguinte.



a) Determine os valores óptimos dos coeficientes do filtro adaptativo, $\mathbf{c}_{opt}$, que minimizam o erro quadrático médio.

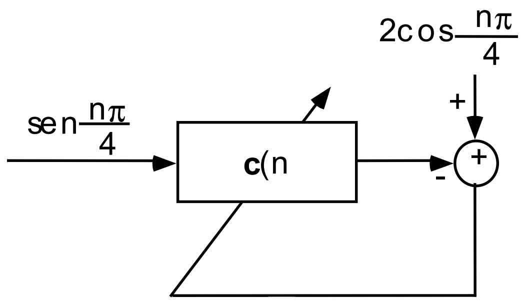
b) Calcule os coeficientes do filtro adaptativo, desde n=0 até n=3, supondo que os seus valores iniciais são nulos e que são ajustados de acordo com o algoritmo LMS, com μ=0,4.

10. Considere o seguinte esquema adaptativo em que o factor de esquecimento vale $\alpha = \frac{9}{10}$. Tomando como valores iniciais $\hat{R}(0) = 0{,}01$ e c(0) = 0, calcule:



a) os valores **k**(1) e **k**(2) do "vector" de ganho de Kalman.
b) os valores de **c**(1) e **c**(2).

11. O filtro adaptativo da figura possui dois coeficientes, $\boldsymbol{c}(n) = [c_o(n) \quad c_1(n)]^T$, actualizados de acordo com o algoritmo RLS com uma janela exponencial decrescente $w_i = 0{,}8^i$.



Estimando o valor inicial do inverso da matriz de autocorrelação de entrada como $\hat{\boldsymbol{R}}^{-1}(0) = 100\boldsymbol{I}$ e admitindo que **c**(0) = **0,** determine:

a) o valor de **c**(1).
b) o erro de estimação "a priori" no instante n = 2.

12. Na entrada de um filtro de Wiener encontra-se a forma de onda $u(n) = a(n) + r(n)$. $r(n)$ é ruído branco aditivo com média nula e variância $\sigma_n^2 = 0{,}2$ e $a(n)$ é um sinal não correlacionado com o ruído, com uma matriz de autocorrelação igual a

$$\boldsymbol{R_a} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}85 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}85 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

O sinal desejado do sistema onde o filtro de Wiener está inserido está relacionado com o sinal $a(n)$ através de $d(n) = a(n) - 0{,}9458\,a(n-1)$.

a) Determine a matriz de autocorrelação de entrada do filtro, **R**.
b) Determine o vector de correlação cruzada, **p**.
c) Determine a variância do sinal desejado, σ_d^2.
d) Quais são os valores dos coeficientes do filtro que minimizam o erro quadrático médio?
e) Qual é o valor mínimo desse erro quadrático médio?
f) Determine uma expressão analítica da superfície de desempenho do erro em função dos modos naturais ν, sabendo que $\varepsilon = \varepsilon_{\min} + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_{opt})^T \boldsymbol{R}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_{opt})$ e que $\lambda_0 = 0{,}8$, $\lambda_1 = 0{,}35$ e $\lambda_2 = 2{,}45$.

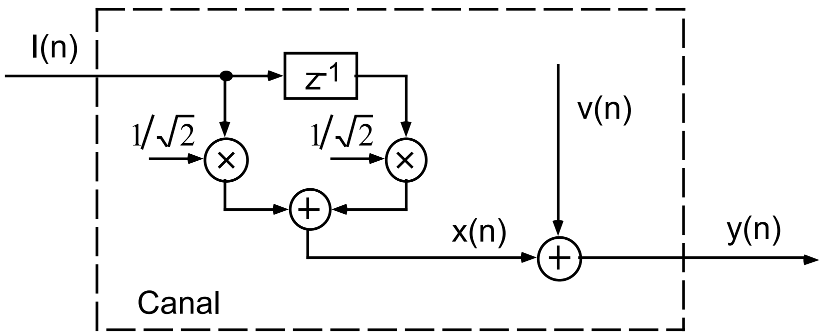
13. A entrada de um filtro transversal adaptativo actualizado de acordo com o algoritmo RLS é $a(n) = 0{,}8^n$ e a estimativa do inverso da sua matriz de autocorrelação de entrada é

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

no instante 0. Os coeficientes do filtro são inicializados em zero, a resposta desejada vale $d(n) = 2 \times 0{,}9^n$ e o algoritmo usa um factor de esquecimento $\alpha = 0{,}9$.

a) Determine o vector de ganho de Kalman no instante n=2.
b) Se no instante n=12 se verificar que $k_0(12) = 0{,}0392$ e $k_1(12) = 0{,}0490$ e o erro de estimação *a priori* valer $e'(12) = 0{,}3561$, quanto vale o erro de estimação *a posteriori* $e(12)$?

14. A sequência binária de informação $I(n) = \pm 1V$ é não-correlacionada entre si e é transmitida através do canal da figura, que introduz um ruído aditivo v(n) branco, com valor médio nulo e variância $\sigma_n^2 = 0{,}2\,V^2$. Pretende-se igualizar este canal com um filtro adaptativo de três coeficientes optimizados de modo a minimizar o erro quadrático médio. O algoritmo usado é o algoritmo LMS com um passo de adaptação fixo escolhido de modo a que o desajuste seja de aproximadamente 7,2%.



Não havendo atrasos no sistema:

a) Determine a matriz de autocorrelação de entrada, **R**.

b) Sabendo que $\lambda_0 = 1 + \sigma_n^2$ e $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sigma_n^2$ são valores próprios de **R** calcule a respectiva disparidade**.**

c) Determine o vector de correlação cruzada, **p**.

d) Calcule o vector óptimo dos coeficientes do filtro.

e) Indique uma gama de valores do passo de adaptação do algoritmo LMS que garanta a sua convergência.

f) Qual foi o passo de adaptação usado?

g) Como sabe, se se usar o algoritmo LMS não se consegue atingir o ponto mais baixo da superfície de desempenho. Quanto vale o erro quadrático médio residual em regime permanente, $E[\varepsilon(\infty)]$?

15. Um sinal complexo (por exemplo, QAM) tem uma matriz de autocorrelação R complexa com vectores próprios complexos, $Q_i = q_{ri} + jq_{ii}$, e valores próprios reais, λ_i. Mostre que $q_{ii} - jq_{ri}$ também é vector próprio de R e está associado ao mesmo valor próprio λ_i.

16. A sequência de símbolos binários não-correlacionados $\{x\} = \pm 2$ da tabela seguinte atravessa um canal cuja resposta impulsional amostrada é $\boldsymbol{h} = [1 \quad 0,5]^T$.

…	x(0)	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)	…
0	0	+2	-2	+2	-2	-2	+2	±2

Pretende-se modelizar (identificar) este canal através de um filtro transversal adaptativo com 3 coeficientes inicializados em zero e actualizados de acordo com o algoritmo NLMS (LMS normalizado), com $b = 0,2$. Sabendo que $c_0(2) = 2/35$ determine os seguintes valores:

a) resposta desejada $d(1)$.

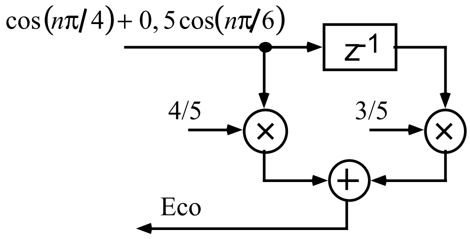
b) erro $e(2)$.

c) coeficientes do filtro no instante n=3.

d) vector de erro de coeficientes $\boldsymbol{c}_e(2)$.

e) matriz de autocorrelação **R**.

17. Num determinado sistema de telecomunicações o sinal $\cos\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{6}$ atravessa o filtro da figura, cujo sinal de saída é interpretado como um eco. Pretende-se cancelar este eco com um filtro adaptativo transversal com o mínimo número de coeficientes possível. O algoritmo adaptativo do cancelador tenta minimizar a função de custo $J(n) = [e(n)]^2 + \alpha \|\boldsymbol{c}(n)\|^2$, em que $\alpha = 0,2$, e usa um passo de adaptação $\mu = 0,15$.



O elemento R_{12} da matriz de autocorrelação de entrada vale $R_{12} = 0,462$, como pode comprovar. Admita que o valor inicial dos coeficientes do cancelador é nulo.

a) Determine o valor do gradiente da superfície de desempenho no instante 1.

b) Escreva a equação de actualização dos coeficientes do cancelador em função do seu valor no instante anterior.

c) Determine o valor de $\boldsymbol{c}(2)$.

d) Supondo que $\boldsymbol{c}(n)$ não depende do sinal de entrada do cancelador, determine o valor esperado de $\boldsymbol{c}(n)$ quando $n \to \infty$.

Resultados

1. a) $\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}^T$; b) 4

2. O algoritmo converge.

3. a) $\begin{bmatrix}0,5 & 0\end{bmatrix}^T$; b) 0,25; c) $\begin{bmatrix}0,4859 & 0,0141\end{bmatrix}^T$.

4. a) $\begin{bmatrix}1 & 0,5\\ 0,5 & 1\end{bmatrix}$; b) Não; c) 2.

5. Deve diminuir.

7. a) $\boldsymbol{c}(1)=\begin{bmatrix}0 & -0,4\sqrt{2}\end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{c}(2)=\begin{bmatrix}0,4 & -0,4\sqrt{2}\end{bmatrix}^T$ e $\boldsymbol{c}(3)=\begin{bmatrix}0,4 & -0,4\sqrt{2}\end{bmatrix}^T$;
b) $\begin{bmatrix}2 & -2\sqrt{2}\end{bmatrix}^T$.

8. a)]0; 1[; b) $c_1(30)=0,9489$; $c_{opt,1}=1$.

9. a) $\begin{bmatrix}0,5 & 1\end{bmatrix}^T$; b) $\boldsymbol{c}(1)=\begin{bmatrix}0 & 0,8\end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{c}(2)=\begin{bmatrix}0,4 & 0,8\end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{c}(3)=\begin{bmatrix}0,4 & 0,96\end{bmatrix}^T$ e $\boldsymbol{c}(4)=\begin{bmatrix}0,48 & 0,96\end{bmatrix}^T$.

10. a) $k(1)=1,389$ e $k(2)=0,686$; b) $c(1)=1,96$ e $c(2)=0,617$.

11. a) $\begin{bmatrix}1,97 & 0\end{bmatrix}^T$; b) $-1,97$.

12. a) $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1,2 & 0,5 & 0,85\\ 0,5 & 1,2 & 0,5\\ 0,85 & 0,5 & 1,2\end{bmatrix}$; b) $\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}0,53 & -0,45 & 0,38\end{bmatrix}^T$; c) 0,95;
d) $c_{opt}=\begin{bmatrix}0,61 & -0,70 & 0,18\end{bmatrix}^T$; 0,25; $\varepsilon=0,25+0,8\,v_0^2+0,35\,v_1^2+2,45\,v_2^2$.

13. a) $\begin{bmatrix}0,25\\ 0,32\end{bmatrix}$; b) 0,354.

14. a) $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1,2 & 0,5 & 0\\ 0,5 & 1,2 & 0,5\\ 0 & 0,5 & 1,2\end{bmatrix}$; b) 3,87; c) $\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}^T$;
d) $c_{opt}=\begin{bmatrix}0,75 & -0,38 & 0,16\end{bmatrix}^T$; e) $0<\mu\le 0,28$; f) 0,02; g) 0,51.

16. a) 2; b) -0,89; c) $\begin{bmatrix}0,07 & -0,01 & 0\end{bmatrix}^T$; d) $\begin{bmatrix}-0,94 & -0,5 & 0\end{bmatrix}^T$; e) $\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

17. a) $\begin{bmatrix}0,62\\ 0,62\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}0,76\\ 0,55\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}0,64\\ 0,55\end{bmatrix}$.