



Espalhamento Espectral

Exercícios

Sílvia A. Abrantes

2006

1. Um sistema de comunicações “convencional” (sem espalhamento de espectro) emprega modulação PSK binária diferencial. A comunicação sofre a interferência de ruído intermitente de largura de banda estreita, potência média total P_j e “duty factor” ρ .
 - a) Determine o valor $\rho = \rho_0$ mais desfavorável (ignorando ruído térmico) em função de E_b/N_j e represente graficamente a correspondente probabilidade de bit errado.
 - b) Represente graficamente a probabilidade de erro em função de E_b/N_j para “duty factors” menos desfavoráveis $\rho = 0,25, 0,50, 0,75$ e $1,0$.
2. Considere a situação do exercício 1 mas com um sistema de comunicações de espalhamento espectral por sequência directa e, como antes, modulação DPSK. A “chip rate” do código de espalhamento é 10 vezes o débito binário de informação.
 - a) Determine o valor $\rho = \rho_0$ mais desfavorável (ignorando ruído térmico) em função de E_b/N_j e represente graficamente a probabilidade de bit errado.
 - b) Calcule o ganho de processamento deste sistema SS.
 - c) Compare o valor de ρ_0 obtido na alínea a) com o do exercício 1.
3. Um sistema DSSS/BPSK usa uma portadora de frequência f_c e sofre a interferência intencional de um tom contínuo de frequência f_j . Admita que o débito binário do código de espalhamento é 100 vezes o débito binário dos dados e que a largura de banda equivalente

de ruído do filtro de frequência intermédia do receptor é $1/T$. Supondo que o período do código de espalhamento é infinito, represente graficamente o ganho de processamento do sistema em função do afastamento $f_j - f_c$.

Nota: considere o ganho de processamento como sendo o factor de redução da potência da interferência (da entrada para a saída do receptor) devido ao uso de espalhamento espectral.

4. O código PN usado num sistema DS/BPSK é gerado por um registo de deslocamento com “feedback” de 19 andares. A probabilidade média de símbolo errado devida a interferência externa intencional não deve exceder 10^{-5} .
- a) Quanto vale o ganho de processamento do sistema, em dB?
- b) Determine a margem de “jamming”, em dB.

5. Um sistema de espalhamento espectral tem os seguintes parâmetros:

$$N_0 = 2.10^{-15} \text{ W/Hz}$$

$$\text{Potência de interferência: } 5.10^{-7} \text{ W}$$

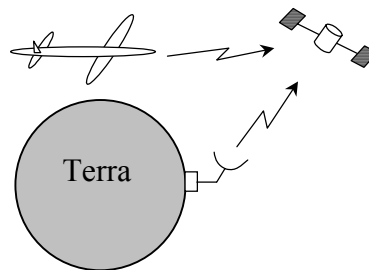
$$\text{Potência do sinal recebido: } 1,2.10^{-8} \text{ W}$$

$$\text{Largura de banda equivalente de ruído do receptor: } 50 \text{ MHz}$$

- a) Determine a relação sinal-ruído de entrada, $(S/N)_i$.
- b) Determine a relação sinal-ruído de saída, $(S/N)_o$, admitindo que o débito binário é 10kbits/s.
6. Uma conversação gravada vai ser transmitida por um sistema SS de sequência directa. O espectro da forma de onda de voz está limitado a 3kHz de banda e na sua digitaliza o são usados 128 níveis de quantiza o.
- a) Determine a “chip rate” necessária para se obter um ganho de processamento de 20dB.
- b) Supondo que o período da sequência PN dura mais de 5 horas, quantos andares são precisos no registo de deslocamento que gera a sequência?
7. Uma mensagem é produzida com um débito binário de 7500 bits/s, modulada em QPSK e transmitida com um sistema SS de sequência directa cuja “chip rate” é 192.10^6 chips/s.
- a) Qual é o ganho de processamento?
- b) Suponha que a potência do sinal recebido   4.10^{-14} W e que a densidade espectral de potência unilateral do ruído branco é $N_0 = 1,6.10^{-20}$ W/Hz. Calcule a rela o sinal-ruído na entrada do receptor, medida na largura de banda do sinal.
8. Um sistema DSSS/BPSK com débito binário de 3 kbits/s está a funcionar num ambiente em que, no receptor, existe uma interferência tonal com uma potência cinco vezes maior que a

do sinal recebido. Se o ruído AWGN for desprezável e se se desejar que $P_e = 10^{-7}$ determine:

- a) a “chip rate”.
 - b) a largura de banda ocupada pelo sinal SS.
9. Um sistema DSSS/BPSK com um ganho de processamento $PG = 30$ dB apresenta $P_b = 2,5 \cdot 10^{-7}$ na presença de interferência. Qual é a margem de “jamming”?
 10. Um sistema DSSS/BPSK transmite informação à taxa de 9 kbits/s na presença de interferência com uma potência 30 dB acima da potência do sinal desejado. Qual é o ganho de processamento requerido para que se atinja $P_e < 10^{-7}$?
 11. No cenário da figura o avião transmite para o satélite um sinal DS com uma potência radiada efectiva isotrópica (EIRP) de 20 dBW e com um débito de $R = 100$ bits/s. O “jammer” transmite ruído gaussiano continuamente com $EIRP_j = 60$ dBW. Supondo que a atenuação avião-satélite é igual à atenuação “jammer”-satélite e que se deseja que $E_b/N_j = 10$ dB, qual é a largura de banda do sinal SS?



12. Tome-se como base o cenário anterior mas agora com o receptor instalado no avião e com o “jammer” mais próximo dele do que o satélite. As perdas satélite-avião são $L_s = 200$ dB e as perdas “jammer”-avião são $L'_s = 160$ dB. Considerando $EIRP = 35$ dBW e $EIRP_j = 60$ dBW, qual deve ser o ganho de processamento para que se tenha $E_b/N_j = 10$ dB?
13. Um sistema SS/BPSK tem um débito binário de 1000 bits/s e está sujeito a uma interferência. Sabe-se que para haver um desempenho satisfatório do sistema (por exemplo, para que a probabilidade de erro seja inferior a um certo valor pré-definido) é necessário que $E_b/N_j \geq 10$ dB, em que N_j representa a densidade espectral de potência da interferência. Supondo que a potência da interferência, P_j , está 20 dB acima da potência do sinal, P , qual a mínima largura de banda do sistema SS para a qual já se consegue satisfazer a relação sinal ruído exigida?
14. Um radiómetro é usado para detectar emissões de rádio. Verifica-se que em cerca de 0,6% dos casos é “detectada” uma emissão inexistente. Considere então que à entrada do decisor

do radiómetro se tem $E/N_0 = 10$ dB, em que E representa a energia do sinal detectado e N_0 é a densidade espectral de potência unilateral do ruído AWGN.

- a) Suponha que a largura de banda do filtro do radiómetro é de 1013,3 Hz e que é usada uma janela de observação temporal de 250 milissegundos. Determine a probabilidade de detecção do sinal.
- b) Para reduzir a probabilidade de interceptação do sinal o emissor vai usar um sistema SS por sequência directa e modulação BPSK. O débito binário de informação é 500 bits/s e o espalhamento de espectro é obtido com uma sequência PN gerada pelo polinómio primitivo $x^{10} + x^7 + 1$. O período desta sequência tem a duração de um bit. Determine a probabilidade da emissão ser detectada pelo radiómetro supondo que a relação $E/N_0 = 10$ dB se mantém, a largura de banda do filtro do radiómetro é igual à largura de banda do sinal SS e o intervalo de observação aumenta para 0,5 s (na tentativa de melhorar a interceptação).

15. Um conjunto de 24 terminais com igual potência partilham espectro num sistema CDMA e cada terminal transmite informação à cadência de 9,6 kbits/s através de um sinal DS/BPSK. Supondo que o ruído AWGN é desprezável calcule a “chip rate” mínima do código PN para que a probabilidade de bit errado seja de 10^{-3} .

16. Um conjunto de k utilizadores partilha em simultâneo o mesmo canal de comunicação usando espalhamento espectral DS/BPSK para transmitir informação para uma estação-base comum. Num dado instante esta recebe dados de um dos utilizadores ao mesmo tempo que todos os outros também estão a transmitir para ela (comportam-se, portanto, como interferência). Admita que todos os sinais chegam à estação-base com a mesma potência e que o ruído AWGN é desprezável.

- a) Admitindo que $PG = 26$ dB, determine o número máximo de utilizadores que o sistema permite se a probabilidade de erro máxima admissível for $3,5 \times 10^{-5}$.
- b) Suponha que um dos sinais emissores interferentes chega ao receptor com o quádruplo da potência dos outros $k - 1$. Qual é o novo número máximo de utilizadores para que, como antes, $P_b \leq 3,5 \cdot 10^{-5}$?

17. Um sistema FH/MFSK de saltos lentos é caracterizado pelos seguintes parâmetros:

Número de bits/símbolo: 4
Número de símbolos MFSK por salto: 5
Número de bandas de frequência FH: 8

Calcule o ganho de processamento do sistema.

18. Um sistema FH/MFSK de saltos rápidos é caracterizado pelos seguintes parâmetros:

Número de bits/símbolo: 4
Número de saltos por símbolo MFSK: 5
Número de bandas de frequência FH: 8

Calcule o ganho de processamento do sistema.

19. Um sistema FH com FSK binário tem os seguintes parâmetros:

Débito binário da mensagem: 2400 bits/s
Saltos por bit de mensagem: 16
Multiplicação de frequência: 8
Ganho de processamento: ≥ 45 dB

- De que método de espalhamento por saltos em frequência se trata: FH lento ou rápido?
- Determine o menor número de bandas de frequência necessárias e que seja potência de 2.
- Determine a largura de banda do sinal de espectro espalhado.

Nota: a multiplicação de frequência é realizada sobre o sinal já espalhado, o que ainda alarga mais o espectro ocupado (neste caso a largura de banda final é oito vezes maior que a do sinal SS sem multiplicação de frequência).

20. Um sistema FH rápido com FSK binário tem os seguintes parâmetros:

Débito binário da mensagem: 2500 bits/s
Saltos por bit de mensagem: 9
Multiplicação de frequência: 10
Número de bandas de frequência FH: 1024

- Calcule a largura de banda do sinal SS.
- Calcule o ganho de processamento em dB.
- Determine a velocidade de relógio do gerador de código PN.
- Determine a separação de frequências do sinal FSK em kHz.

21. Considere um sistema FH/MFSK. O gerador PN tem 20 andares, o comprimento da sequência é máximo e cada estado do registo de deslocamento (composto de 20 bits) indica uma nova frequência de salto. A separação mínima entre frequências de salto é 200 Hz e a velocidade do relógio do gerador é 2 kHz. Supondo que se usa 8-FSK e que o débito binário é 1,2 kbits/s:

- Determine a largura de banda do sistema.
- Qual é a “chip rate”?
- Quantos “chips” ocorrem em cada símbolo?
- Qual é o ganho de processamento?

22. Um sistema FH/BFSK de saltos lentos com um débito binário de 3 kbits/s está a trabalhar num ambiente de interferência de banda larga em que todo o canal está a ser perturbado por

potência cinco vezes mais elevada que a do sinal desejado. Sem “jammer” é $E_b/N_0 = 60$ dB e $N_0 = 10^{-21}$ W/Hz. Se se desejar $P_e = 10^{-7}$:

- a) Qual é o ganho de processamento mínimo?
 - b) Qual é a largura de banda usada?
- 23.** Um gerador de sequências binárias pseudo-aleatórias é caracterizado pelo polinómio 23g. Mostre que se verificam as propriedades do balanceamento e das séries e represente graficamente a função de autocorrelação da sequência PN.
- 24.** Quantas sequências m distintas é possível obter com um registo de deslocamento linear de 13 andares? E de 8 andares?
- 25.** Considere uma sequência aperiódica definida como uma sequência de N elementos ± 1 . Se a representarmos por (a_1, a_2, \dots, a_N) , $a_i = \pm 1$, a sua função de autocorrelação (aperiódica) pode ser definida como

$$R_a(k) = \sum_{n=1}^{N-k} a_n a_{n+k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Uma maneira simples de calcular $R_a(k)$ é multiplicar os elementos da sequência pelos elementos correspondentes da sequência deslocada de k dígitos. Por exemplo, se tivermos uma sequência aperiódica de quatro dígitos o valor de $R_a(1)$ pode ser calculado assim:

$$R_a(1) = \begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \\ \hline & a_1 a_2 & + a_2 a_3 & + a_3 a_4 & \end{array}$$

Imagine agora que tem uma sequência aperiódica de sete dígitos $(+1, +1, +1, -1, -1, +1, -1)$. Esta sequência é um exemplo de uma *sequência de Barker*.

- a) Determine a função de autocorrelação aperiódica. Verificará que $R_a(0) = 7$ e que os outros valores são 0 ou -1, confirmando que numa sequência de Barker $|R_a(j)| \leq 1$, $j \neq 0$.
 - b) Um deslocamento cíclico da sequência (por exemplo, $(+1, +1, -1, -1, +1, -1, +1)$) possui as mesmas propriedades de correlação?
- 26.** Os polinómios $x^4 + x + 1$ e $x^6 + x^3 + 1$ geram sequências pseudo-aleatórias. O primeiro é primitivo e o segundo não.
- a) Mostre que o polinómio $x^6 + x^3 + 1$ não é primitivo.
 - b) A sequência $\mathbf{r} = 100010011010111$ é gerada por $x^4 + x + 1$. Obtenha a sequência $\mathbf{s} = \mathbf{r}[4]$ e diga, justificando, se foi obtida por decimação própria ou não.

- 27.** Um gerador de sequências PN é caracterizado pelo polinômio binário $x^4 + x^3 + x + 1$.
- Através de uma tabela determine a sequência de saída do gerador quando o conteúdo inicial do registo de deslocamento é 1010. Deverá obter os bits suficientes para calcular o período da sequência.
 - Repita a alínea anterior usando um método algébrico. A sequência obtida deve ser igual.
 - Determine algebricamente a sequência de saída e o período se o conteúdo inicial for 0001.
 - Calcule o valor do período máximo da sequência que é possível obter com $x^4 + x^3 + x + 1$.
- 28.** As duas sequências m de comprimento 7 $(+1,+1,+1,-1,-1,+1,-1)$ e $(+1,+1,+1,-1,+1,-1,-1)$ são um par preferido.
- Quantos códigos de Gold pode obter?
 - Construa um código de Gold a partir das sequências.
 - Qual é o valor absoluto máximo da função de correlação cruzada dos códigos de Gold?
- 29.** Um registo de deslocamento de quatro andares com “feedback” linear caracterizado pelo polinômio $g(x) = x^4 + x^2 + 1$ gera uma sequência pseudo-aleatória. Supondo que o conteúdo inicial é 0100 e que a cadência do relógio é 10 MHz:
- Determine a sequência de saída do gerador.
 - Determine o período (em segundos) da sequência. Trata-se de uma sequência de comprimento máximo?
 - Represente graficamente a função de autocorrelação.
- 30.** Seja $n = 9$ e 10 o número de andares de dois registos de deslocamento com “feedback” linear. Determine, para cada um deles:
- o número de sequências de Kasami obtidas a partir de uma única sequência m .
 - os valores da função de autocorrelação dessas sequências de Kasami.
 - os valores da função de correlação cruzada entre duas dessas sequências.

Soluções

1. $\rho_0 = \frac{N_j}{E_b}$ e $\bar{P}_{b,máx} = \frac{1}{2eE_b/N_j}$.
2. a) $\rho_0 = \frac{T_c}{T} \frac{N_j}{E_b}$ e $\bar{P}_{b,max} = \frac{T_c}{T} \frac{1}{2eE_b/N_j}$; b) 10 dB; c) ρ_0 é 10% do anterior.
- 3.
4. a) $PG(dB) = 57,2$ dB; b) $(P_j/P)_{dB} = 47,6$ dB (com $(E_b/N_0)_{dB} = 9,6$ dB).
5. a) $\left(\frac{S}{N}\right)_i (dB) = -17$ dB; b) $\left(\frac{S}{N}\right)_0 (dB) = 23,0$ dB.
6. a) $R_c = 4,2$ Mchips/s; b) 37 andares, no mínimo.
7. a) $PG(dB) = 47,1$ dB; b) $(S/N)_{dB} = -21,9$ dB.
8. a) 203 kchips/s; b) 406 kHz.
9. 19 dB.
10. 41,3 dB.
11. 20 MHz.
12. 75 dB.
13. $B \geq 1$ MHz.
14. a) 0,03; b) 0,006.
15. 1,054 Mchips/s
16. a) 51; b) 47.
17. $PG(dB) = 9$ dB.
18. $PG(dB) = 16$ dB.
19. a) FH rápido; b) 256; c) $B_{FFH} = 157,286$ MHz.
20. a) $B_{FFH} = 460,8$ MHz; b) $PG(dB) = 49,5$ dB; c) 225 kHz; d) $\Delta f = 22,5$ kHz.

21. a) 209,7 MHz; b) 2 kchips/s; c) 5 chips/símbolo; d) 48,2 dB.
22. a) $PG = 128$ (21 dB); b) 768 kHz.
23. Propriedade do balanceamento: há 8 “uns” e 7 “zeros”; propriedade das séries: $\frac{N+1}{2} = 8$ séries (quatro de “uns” e quatro de “zeros”), das quais 50% têm comprimento 1, 25% têm comprimento 2, 12,5% têm comprimento 3 e 12,5% têm comprimento 4.
24. 630; 16.
25. a) $R_a(0) = 7$, $R_a(1) = R_a(3) = R_a(5) = 0$ e $R_a(2) = R_a(4) = R_a(6) = -1$.
 b) As propriedades são alteradas pois a nova autocorrelação passa a ter outros valores. Por exemplo, $R_a(1) = -2$.
26. a) Não é primitivo pois $x^9 + 1$ é seu múltiplo e $9 \neq 2^n - 1 = 63$; b) $s = \mathbf{r}[4] = 11110001001101011110\dots$; decimação é própria.
27. a) Sequência de saída 01010101... e período 2; c) sequência de saída 100011 100011 10... e período 6; d) 6.
28. a) número: 9; b) dois exemplos: $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = 0000110$ e $\mathbf{a} \oplus T\mathbf{b} = 0011011$; c) valor máximo: 5.
29. a) 001010; b) 600 ns; c) $R(\tau) \in \{1, -1/3, 1/3\}$.
30. $n = 9$: não há sequências de Kasami.
 $n = 10$: a) 32; b) $R(\tau) \in \{-33, -1, 31, 1023\}$; c) $R_c(\tau) \in \{-33, -1, 31\}$.