Exame de 1ª chamada de

Teoria da Informação — EEC4289

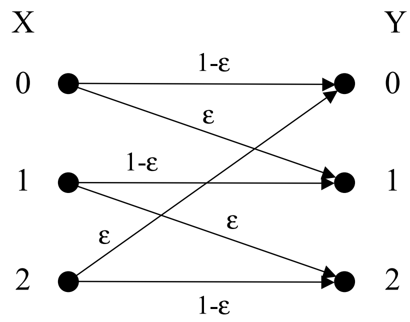
(2001-2002)

Duração: 2 horas (sem consulta) 14-6-2002

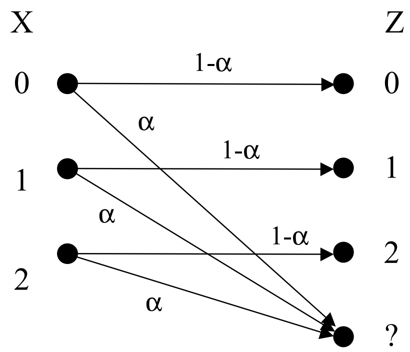
Nome____

As perguntas 1-4 devem ser respondidas em folha separada. Tenha em atenção que nas perguntas de escolha múltipla cada escolha errada desconta 1/4 da cotação.

1. Considere os seguintes canais discretos sem memória.



Canal A



Canal B

a) Determine $H(Y|X)$.

b) Calcule a capacidade do canal A.

c) Calcule a capacidade do canal B.

2. Os seguintes códigos binários são possíveis? Porquê?

a) (7, 2), $d_{min} = 5$

b) (63, 31), $t = 17$

c) (63, 45), $d_{min} = 7$

3. Um codificador convolucional produz um par de bits de saída por cada bit de entrada, de acordo com as equações

$$y'_j = m_{j-3} \oplus m_{j-1} \oplus m_j$$
$$y''_j = m_{j-2} \oplus y'_j$$

a) Desenhe um esquema do codificador.

b) Quanto vale o comprimento de restrição?
c) Quantos estados existem?
d) Escreva as expressões dos polinómios geradores.

4. O limite de Shannon num canal gaussiano de largura de banda ilimitada é -1,59dB. Suponha o caso realista de usar um canal com largura de banda limitada mas não inferior a metade da taxa binária de transmissão, $B \geq 1/2T$, e suponha também que é usada codificação de canal com taxa de código $R_c = 1/2$. Nestas condições, mostre que a relação E_b/N_0 no receptor deverá ser superior a 0 dB se quisermos garantir uma comunicação com uma taxa arbitrariamente pequena de erros.

5. Um alfabeto é constituído pelas seis letras A, B, C, D, E e F, que ocorrem com frequências relativas de 20%, 8%, 15%, 14%, 19% e 24%, respectivamente. Deseja-se codificar a sequência "ABEC".

a) Calcule a entropia da fonte com aquele alfabeto.

2,58 ☐ 2,51 ☐ 2,43 ☐ _______ ☐

b) Use codificação aritmética para determinar um número real capaz de representar a sequência dada.

0,0500 ☐ 0,0432 ☐ 0,0506 ☐ _______ ☐

c) Ainda com codificação aritmética, determine a palavra binária mais curta que represente a mesma sequência.

(Continua)

T. I., 1ª chamada, 14-6-2002, Continuação

Nome____

d) Codifique "ABEC" com o código de Huffman binário.

6. Um código de blocos com a matriz **G** apresentada é usado para transmissão num canal binário simétrico com probabilidade de transição $p = 10^{-4}$.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Codifique a sequência 101100.

b) Determine a distância mínima.

2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ ______ ☐

c) Qual é a probabilidade de eventuais erros não serem detectados?

4.10^{-9} ☐ 4.10^{-11} ☐ 4.10^{-12} ☐ _______ ☐

d) Encurte o código no segundo bit e determine as palavras de código resultantes.

7. Considere o código cíclico de Hamming (7,4) sistemático gerado por $p^3 + p + 1$.

a) Codifique a mensagem 1001.

1001011 ☐ 1001111 ☐ 1001110 ☐ _________ ☐

b) Tendo-se recebido a palavra [0*1*001] sem erros quais terão sido os quatro bits enviados?

0011 ☐ 0111 ☐ 0110 ☐ _______ ☐

Exame de 2ª chamada de

Teoria da Informação — EEC4289

(2001-2002)

Duração: 2 horas (sem consulta) 8-7-2002

Nome____

As perguntas 1-4 devem ser respondidas em folha separada. Tenha em atenção que nas perguntas de escolha múltipla cada escolha errada desconta 1/4 da cotação.

1. Considere o canal discreto quaternário $X \to Y$, em que $x, y \in \{0,1,2,3\}$, com a seguinte matriz de probabilidades de transição:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

a) Determine a capacidade deste canal.

b) A variável aleatória Z está relacionada com Y através de $z = \begin{cases} A & \text{se } y \in \{0,1\} \\ B & \text{se } y \in \{2,3\} \end{cases}$.

Calcule $I(X;Z)$ supondo que $P(x = 1) = P(x = 3) = 1/2$.

c) Calcule a capacidade do canal $X \to Z$.

2. Suponha que deseja adicionar seis números a_1, a_2, …, a_6 de modo a encontrar o resultado o mais rapidamente possível usando somadores de duas entradas que demoram dois segundos a somar. Por exemplo, se dispusermos de todos os números ao mesmo tempo necessitaremos de, pelo menos, 6 segundos para realizar a soma. Suponha que, contudo, os números não chegam todos ao mesmo tempo mas sim nos instantes 1, 4, 3, 5, 3 e 4 segundos, respectivamente.

a) Desenhe uma árvore com somadores de duas entradas que calcule a soma o mais depressa possível.

b) Em que instante de tempo está a soma disponível?

3. Considere o código cíclico (7, 3) gerado pelo polinómio $p^4 + p^3 + p^2 + 1$.

a) Codifique a sequência 101.

b) Descodifique a sequência 0101010.

c) Qual é a distância mínima do código?

4. Considere um código de blocos ternário (4, 2) sistemático e corrector de erros simples.

a) Determine uma matriz de verificação de paridade *H* adequada, justificando convenientemente.

b) Suponha que as sequências ternárias 1011 e 2101 são palavras do código. Calcule a síndrome da sequência 1122.

5. a) Um descodificador LZ78 possui o dicionário inicial

1	espaço
2	A
3	I
4	R
5	T

O respectivo codificador produziu a sequência

(5, A) (6, R) (2, T) (8,A) (1, T) (9, R) (9, T) (2, espaço) (3, R) (4, A)

Qual terá sido a mensagem?

b) Um espanhol disse: "tres_tristes_tigres." (mesmo assim, sem acento, com o ponto final e desprezando as aspas). Imagine que se deseja codificar esta frase com um codificador LZ77 com janela de 17 posições (das quais 5 pertencem ao *buffer*) e que a parte inicial "tres_" já foi codificada. Codifique o resto da mensagem.

c) Admitindo que o mensageiro só conhece os símbolos da sua mensagem (e mais nenhum!) quantos bits serão necessários por bloco de saída e para codificar a sub-sequência "**tristes_tigres.**"?

Bloco: 8 ☐ 10 ☐ 12 ☐ _______ ☐

Sub-sequência: 48 ☐ 56 ☐ 60 ☐ _______ ☐

(Continua)

Nome____

6. O código binário gerado por $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é usado num canal binário simétrico com probabilidade de erro $p = 10^{-3}$.

a) Sendo a taxa de transmissão no canal de R=1Mbits/s, qual é o intervalo médio, em horas, entre erros não detectados?

22,3 h ☐ 80,4 h ☐ 139,1 h ☐ _______ h ☐

b) Calcule o majorante da distância mínima para um código (6,2) arbitrário de acordo com o limite de Plotkin. Determine também o valor real de $d_{\min}$ neste código concreto.

Majorante: 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ _______ ☐

d_{min}: 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ _______ ☐

c) O polinómio gerador de um certo código cíclico (6, 2) é múltiplo de p + 1. Determine o polinómio gerador.

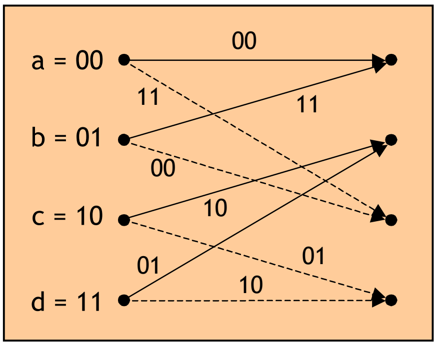
d) Determine o polinómio enumerador de pesos do código aumentado (7, 2).

$1+2z^4+z^5$ ☐ $1+2z^4+z^6$ ☐ $z+3z^5$ ☐ _______ ☐

e) Admita agora que a fonte produz informação à cadência de r_b = 100 kbits/s. Se se usar um sistema ARQ "Selective Repeat" com o mesmo canal e com o código aumentado (7, 2), qual é o débito binário no canal, em kbits/s?

352,4 ☐ 350,0 ☐ 297,9 ☐ ___________ ☐

7. Use o algoritmo de Viterbi para encontrar a sequência $Z + \hat{E}$ e a mensagem original X quando Z = 01 11 01 01 11 01 10 11.
(para bom entendedor: "em caso de dúvida mantenha o de cima").



$Z + \hat{E}$:

X:

Boa sorte!!

Exame de recurso de

Teoria da Informação — EEC4289

(2001-2002)

Duração: 2 horas (sem consulta) 24-7-2002

Nome____

As perguntas 1-4 devem ser respondidas em folha separada. Tenha em atenção que nas perguntas de escolha múltipla cada escolha errada desconta 1/4 da cotação.

1. Uma fonte discreta produz símbolos do alfabeto {A, B, C, D, E, γ} com as probabilidades de ocorrência da tabela seguinte. Deseja-se codificar a sequência A γ B C.

$P(A)$	$P(B)$	$P(C)$	$P(D)$	$P(E)$	$P(\gamma)$
0,30	0,07	0,15	0,15	0,08	0,25

a) Determine a entropia da fonte.

b) Quantos bits necessita para codificar a sequência dada com o código de Huffman de variância mínima?

c) Determine um valor real adequado que represente a sequência em código aritmético (considere a ordenação literal supra).

d) Qual a sequência binária mais curta obtida com a mesma codificação aritmética?

2. Considere um canal gaussiano em que a saída Y está relacionada com a entrada X através de $Y = X + N$, onde N representa o ruído gaussiano branco de média nula e desvio padrão 700 mV. Determine a entropia condicional $H(X|N)$, em bits/símbolo, se X for um sinal gaussiano sem componente contínua e de potência média 936,8 mW.

3. Considere um código binário cíclico (9, 6) sistemático no qual os bits de paridade surgem **antes** dos bits da mensagem.

a) Determine a matriz geradora do código.

b) Calcule os limites de Singleton e Plotkin.

c) O polinómio gerador do código cíclico (9, 6) pode também gerar um código cíclico (18, 15). Qual é a distância mínima deste último código? Justifique.

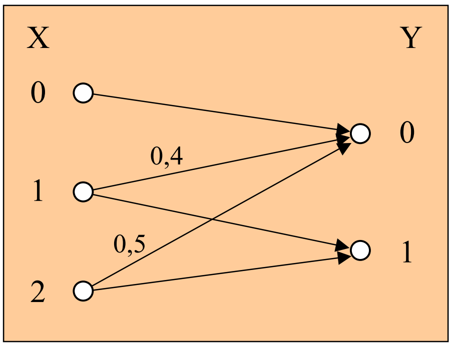
4. a) No código de Golay aumentado (24,12) o polinómio enumerador de pesos é

$$1+759z^{8}+2576z^{12}+759z^{16}+z^{24}.$$

Para e = 10, 12, 14, 16 e 24 calcule o número de padrões de erro de peso e que o código detecta.

b) Num código RS (15, 11) existem 825825 palavras com peso 6. Qual é a probabilidade de não se detectarem erros em palavras com seis erros aleatórios?

5. Um canal discreto sem memória *X*-*Y* é representado pelo diagrama seguinte.



Os elementos de *X* são equiprováveis. Um outro canal discreto sem memória *Y*-*Z*, com *Z* = 0, 1, 2, 3, tem a matriz de canal

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $H(Y|X)$.

0,33 ☐ 0,66 ☐ 0,99 ☐ ________ ☐

(Continua)

T. I., Recurso, 24-7-2002, Continuação

Nome____

b) Calcule a probabilidade $P(Z=2|X=2)$.

0,22 ☐ 0,25 ☐ 0,28 ☐ _________ ☐

c) Se conhecermos Z reduzimos a incerteza que temos sobre a fonte X. Quantifique essa redução de incerteza.

0,04 ☐ 0,09 ☐ 0,19 ☐ _________ ☐

d) Determine a equivocação devida ao canal composto X-Z.

1,54 ☐ 1,95 ☐ 1,99 ☐ _________ ☐

6. Um código linear (8,4) tem a seguinte matriz geradora:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Codifique a sequência 1100.

b) Determine a distância mínima do código.

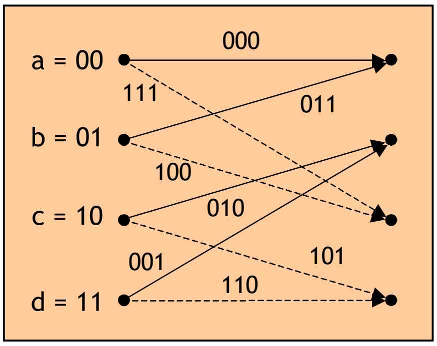
2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ _________ ☐

c) Qual é a probabilidade de erro não corrigido se usar este código num canal BSC com probabilidade de erro 10^{-5}?

$2{,}1.10^{-5}$ ☐ $2{,}1.10^{-7}$ ☐ $2{,}1.10^{-9}$ ☐ _________ ☐

d) Determine o padrão de erro mais provável correspondente à síndrome 1011.

7. Um código convolucional tem a treliça da figura seguinte.



a) Qual é a taxa do código?

1/2 ☐ 1/3 ☐ 2/3 ☐ ________ ☐

b) Determine a distância livre.

5 ☐ 6 ☐ 8 ☐ ________ ☐

c) Use o algoritmo de Viterbi para estimar os primeiros cinco bits da mensagem original X e a respectiva sequência Y enviada pelo codificador, no caso de o descodificador receber a sequência binária

$$Z = 001\ 111\ 001\ 001\ 111\ 001\ 110\ 111.$$

(para bom entendedor: "em caso de dúvida mantenha o de cima").

Primeiros cinco bits de X:

Respectiva sequência codificada Y: