Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Licenciatura em Engenharia Informática e Computação

João Falcão e Cunha
João Mendes Moreira

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

Mini-Teste 1

2001.11.06

- *Esta prova escrita tem a duração de 1h00 e é sem consulta.*
- *Identifique cada folha com o seu Nome completo.*
- *Responda à Parte Teórica em folhas separadas da Parte Prática. Inicie cada resposta no topo da página, não se esquecendo de indicar o número da pergunta a que está a responder de forma clara.*
- *Pode escrever com lápis e tenha muito cuidado com a qualidade do Português e da Apresentação.*

Parte Teórica

1. Defina os seguintes conceitos:

   a) Função URM-computável.

   b) Função característica de um predicado $M(x_1, \ldots, x_n)$.

   c) Predicado decidível.

2. Considere a função $f(x,z)=x^2+2^z$ (por exemplo $f(2,2)=8$). Calcule o valor da função *somatório_limitado*, tal como definida de seguida, para $x=3$ e $y=3$ (nota: esta função *somatório_limitado* tem como variáveis livres x e y):

   somatório_limitado (x,y) = $\sum_{z<y} f(x,z)$ é definida pela seguinte equação recursiva:

$$\begin{cases} \sum_{z<0} f(x,z) = 0 \\ \sum_{z<y+1} f(x,z) = \sum_{z<y} f(x,z) + f(x,y) \end{cases}$$

Parte Prática

3. Escreva um programa URM que implemente a função *multiplicação(x, y)*$= x \times y$ sem utilizar a forma genérica da recursão.

4. Escreva um programa URM que implemente a função $f(x) = x + 2$ usando a forma genérica da recursão.

5. Sabendo que as funções básicas são computáveis e usando os teoremas da substituição, da recursão e/ou da minimização, prove que a função $\text{quociente}(x_1, x_2)$ também é computável.

$$\text{quociente}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1/x_2, \text{ se } x_1 \text{ é múltiplo de } x_2. \\ \text{indefinido, caso contrário.} \end{cases}$$

Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Licenciatura em Engenharia Informática e Computação

João Falcão e Cunha
João Mendes Moreira

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

Esboço de solução do Mini-Teste 1

2001.11.06

1.

2.

$$somatório\_limitado\ (x,y) = \sum_{z<y} f(x,z)$$

$$somatório\_limitado\ (3,3) = \sum_{z<3} f(3,z):$$

$$\sum_{z<2+1} f(3,z) = \sum_{z<2} f(3,z) + f(3,2)$$

$$\sum_{z<1+1} f(3,z) = \sum_{z<1} f(3,z) + f(3,1)$$

$$\sum_{z<0+1} f(3,z) = \sum_{z<0} f(3,z) + f(3,0)$$

$$\sum_{z<0} f(3,z) = 0$$

Logo: $somatório\_limitado\ (3,3) = \sum_{z<3} f(3,z) = 0 + f(3,0) + f(3,1) + f(3,2)$

$f(x,z)=x^2+2^z$
$f(3,2)=3^2+2^2=9+4=13$
$f(3,1)=3^2+2^1=9+2=11$
$f(3,0)=3^2+2^0=9+1=10$

Logo : $somatório\_limitado\ (3,3) = \sum_{z<3} f(3,z) = 0+10+11+13=34$

3.

I1	J(1,4,9)
I2	J(2,3,6)
I3	S(3)
I4	S(5)
I5	J(1,1,2)
I6	S(4)
I7	Z(3)
I8	J(1,1,1)
I9	T(5,1)

4.

$h(0)=f(\,)=2$

$h(y+1)=g(y,\, h(y))=h(y)+1$

Programama F	
I1	S(1)
I2	S(1)

Programa G	
I1	S(2)
I2	T(2,1)

$m = max(n+2,\, \rho(F),\, \rho(G)) = max(0+2,\, 1,\, 2) = 2$
$t = m+n = 2+0 = 2$

I1	T(1,3)
I2	Z(1)
I3	S(1)
I4	S(1)
I5	T(1, 5)
I6	J(4,3,14)
I7	T(4,1)
I8	T(5,2)
I9	S(2)
I10	T(2,1)
I11	T(1,5)
I12	S(4)
I13	J(1,1,6)
I14	T(5,1)

5.

quociente(x_1, x_2) $= \mu y(|x_1 - x_2 * y| = 0)$

Provando que $|x_1 - x_2 * y|$ é computável e definida para todos os valores menores ou iguais a y, (caso exista tal y), então quociente(x_1, x_2) também é computável pelo teorema da minimização.

Como $|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$ e como $x+y$ é computável (pois $x+0=x$ e $x+(y+1)=(x+y)+1$, logo $x+y$ é computável por recursão e pelo facto das funções básicas serem computáveis, nomeadamente as funções projecção e sucessor), bastará provar que $x \dot{-} y$ é computável para se concluir que $|x-y|$ também o é pelo teorema da substituição.

Para provar que $x \dot{-} y$ é computável basta provar que $x \dot{-} 1$ também o é, pois caso o seja, $x \dot{-} y$ também o será, já que é definida por recursão através de $x \dot{-} 0 = x$ e $x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1$.

Como $x \dot{-} 1$ é definida por $0 \dot{-} 1 = 0$ e $(x+1) \dot{-} 1 = x$ então é computável pelo teorema da recursão e porque as funções $0(x)$ e projecção são funções básicas.

$x * y$ é computável pois $x*0 = 0$ e $x*(y+1) = (x*y) + x$, logo $x*y$ é computável por recursão e pelo facto da função $0(x)$ ser básica, logo computável, e por $x+y$ ser também computável, como já se demonstrou anteriormente.

Assim, sendo $|x-y|$ e $x*y$ computáveis, logo $|x_1 - x_2 * y|$ também é computável pelo teorema da substituição. Logo, quociente(x_1, x_2) $= \mu y(|x_1 - x_2 * y| = 0)$ também é computável pelo teorema da minimização.

Está assim provado que quociente(x_1, x_2) é computável, como se queria demonstrar.