Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Licenciatura em Engenharia Informática e Computação

João Falcão e Cunha
João Mendes Moreira

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

Mini-Teste 2

2001.12.07

- *Esta prova escrita tem a duração de 1h00 e é sem consulta.*
- *Identifique cada folha com o seu Nome completo.*
- *Responda à Parte Teórica em folhas separadas da Parte Prática. Inicie cada resposta no topo da página, não se esquecendo de indicar o número da pergunta a que está a responder de forma clara.*
- *Pode escrever com lápis e tenha muito cuidado com a qualidade do Português e da Apresentação.*

Parte Teórica

1.

a) Defina uma função unária total, $i(x)$, que não seja computável, recorrendo a uma construção baseada no método da diagonal. Justifique a resposta.

b) Apresente de seguida um plano de prova para a não computabilidade de uma função binária total $i(x,y)$.

2. Explique o que significam as seguintes expressões (não se deseja uma demonstração ou refutação das afirmações, mas apenas a sua interpretação):

a) '$W_x = \{3\}$' não é decidível.

b) '$x \in E_x$' é decidível.

c) Programa Universal.

Parte Prática

3. Responda às seguintes questões apresentando todos os cálculos que efectuar.

   a) Qual é a função ϕ_{16543}?

   b) Qual é a função $\phi^{(2)}_{16543}$?

4. Seja f: $N_0 \rightarrow N_0$ uma função computável e total.

   a) Construa uma função g: $N_0 \rightarrow N_0$ não computável tal que $g(x)=f(x)$ quando x não é múltiplo de 3.

   b) Mostre que a função $g(x)$ que construiu na alínea anterior não é computável.

Equações:

$\beta(Z(n))=4(n-1).$

$\beta(S(n))=4(n-1)+1.$

$\beta(T(m, n))=4\pi(m-1, n-1)+2.$

$\beta(J(m, n, q))=4\zeta(m, n, q)+3.$

$\pi(m, n)=2^m(2n+1)-1.$

$\zeta(m, n, q)=\pi(\pi(m-1, n-1), q-1).$

$\pi^{-1}(x)=(\pi_1(x), \pi_2(x)),$ onde $\pi_1(x)=(x+1)_1$ e $\pi_2(x)=1/2((x+1)/2^{\pi_1(x)}-1).$

$\zeta^{-1}(x)=(\pi_1(\pi_1(x))+1, \pi_2(\pi_1(x))+1, \pi_2(x)+1).$

$\tau(a_1, \ldots, a_k)=2^{a_1}+2^{a_1+a_2+1}+2^{a_1+a_2+a_3+2}+\ldots+2^{a_1+a_2+\ldots+a_k+k-1}-1.$

$\tau^{-1}(x)=(a_1, \ldots, a_k).$

x	2^x
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

x	2^x
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768

Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Licenciatura em Engenharia Informática e Computação

João Falcão e Cunha
João Mendes Moreira

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

Esboço de solução do Mini-Teste 2

2001.12.07

1.

2.

3.

a) O número *16543* decompõe-se da seguinte forma: $16543 = 2^5+2^7+2^{14}-1$

$\beta(I_1)=5=4x1+1 \Rightarrow I_1=S(2)$

$\beta(I_1)+ \beta(I_2)+1=7 \Rightarrow \beta(I_2)=7-5-1=1=4x0+1 \Rightarrow I_2=S(1)$

$\beta(I_1)+ \beta(I_2) + \beta(I_3)+1=14 \Rightarrow \beta(I_3)=14-7-1=6=4x1+2 \Rightarrow$

$I_3=T(\pi_1(1)+1, \pi_2(1)+1)=T(1+1,0+1)=T(2,1)$

Nota: $\pi_1(1)=(1+1)\ _1=1$ e $\pi_2(1)=1/2((x+1)/2^{\pi_1(x)}-1)= 1/2((1+1)/2^1-1)= 0$

Assim, $\phi_{16543}(x)=1$

b) $\phi^{(2)}_{16543}(x,y)=y+1$

4.

a)

$$g(x)=\begin{cases} f(x), \text{se } x \text{ não é múltiplo de 3} \\ \phi_{\mathrm{qt}(3,x)}(x)+1, \text{se '}x\text{ é múltiplo de 3'} \wedge \text{'}\phi_{\mathrm{qt}(3,x)}(x)\downarrow\text{'} \\ 0, \text{se '}x\text{ é múltiplo de 3'} \wedge \text{'}\phi_{\mathrm{qt}(3,x)}(x)\uparrow\text{'} \end{cases}$$

b) Admitindo por hipótese que g é computável, então $\exists m \in N_0$: $g=\phi_m$.

Sabendo que $3m$ é múltiplo de 3, $\forall m$, pode-se provar que $g(3m) \neq \phi_m (3m)$, $\forall m$.

$$g(3m) = \phi_m(3m) = \begin{cases} \phi_m(3m) + 1 & \text{se } \phi_m(3m) \text{ está definido.} \\ 0 & \text{se } \phi_m(3m) \text{ não está definido.} \end{cases}$$

O que é absurdo, para qualquer $m \in N_0$. Logo, g não é computável.