Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Licenciatura em Engenharia Informática e Computação

João Falcão e Cunha

João Mendes Moreira

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

P r o v a E s c r i t a – 1ª chamada

2002.01.11

- *Esta prova escrita tem a duração de 2h30 e é sem consulta.*
- *Identifique cada folha com o seu Nome completo.*
- *Responda à Parte Teórica em folhas separadas da Parte Prática. Inicie cada resposta no topo da página, não se esquecendo de indicar o número da pergunta a que está a responder de forma clara.*
- *Pode escrever com lápis e tenha muito cuidado com a qualidade do Português e da Apresentação.*
- *Não é permitida a utilização da máquina de calcular.*

Parte Teórica

1. Defina sucintamente as seguintes noções:

   a) Função computável.

   b) Predicado não decidível.

   c) Método da diagonal.

2. Indique o significado das seguintes expressões:

   a) '$\phi_x(x) = 0$' não é decidível.

   b) '$P_{33}(x) \downarrow 33$' é decidível.

   c) '$x \in E_x$' é parcialmente decidível.

3. Suponha que $f(x)$ e $g(x, y, z)$ são funções computáveis (x, y, z: $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$). A função h é definida recursivamente a partir de funções f e g. Apresente a equação genérica para a definição recursiva da função h. Mostre que h é uma função computável, indicando como se constrói o seu programa URM a partir de programas F e G, correspondentes às funções computáveis f e g.

Parte Prática

4.

a) Qual o código do seguinte programa?

I1	S(1)
I2	J(1,2,1)

b) Seja ***i*** o código do programa apresentado na alínea anterior. Defina as funções ϕ_i e $\phi_i^{(2)}$.

5. Seja $h(x,y,z) = x \times y \times (z!)$

a) Defina a função *h(x,y,z)* usando o conceito de recursão.

b) Escreva um programa URM que implemente a função *h(x,y,z)* usando a forma genérica da recursão.

6. Seja $f\colon N_0 \rightarrow N_0$ uma função computável e total.

a) Construa uma função $g\colon N_0 \rightarrow N_0$ não computável tal que $g(x)=f(x)$ quando x não é o factorial de um número natural. Utilize, para tal, o método da diagonal.

b) Demonstre que a função *g(x)* que construiu na alínea anterior não é computável.

Equações:

$\beta(Z(n))=4(n-1).$

$\beta(S(n))=4(n-1)+1.$

$\beta(T(m, n))=4\pi(m-1, n-1)+2.$

$\beta(J(m, n, q))=4\zeta(m, n, q)+3.$

$\pi(m, n)=2^m(2n+1)-1.$

$\zeta(m, n, q)=\pi(\pi(m-1, n-1), q-1).$

$\pi^{-1}(x)=(\pi_1(x), \pi_2(x)),$ onde $\pi_1(x)=(x+1)_1$ e $\pi_2(x)=1/2((x+1)/2^{\pi_1(x)}-1).$

$\zeta^{-1}(x)=(\pi_1(\pi_1(x))+1, \pi_2(\pi_1(x))+1, \pi_2(x)+1).$

$\tau(a_1, \dots , a_k)=2^{a_1}+2^{a_1+a_2+1}+2^{a_1+a_2+a_3+2}+ \dots +2^{a_1+a_2+\dots+a_k+k-1}-1.$

$\tau^{-1}(x)=(a_1, \dots , a_k).$

x	2^x	x	2^x
0	1	9	512
1	2	10	1024
2	4	11	2048
3	8	12	4096
4	16	13	8192
5	32	14	16384
6	64	15	32768
7	128	16	65536
8	256	17	131072

João Falcão e Cunha
João Mendes Moreira

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

Esboço de solução da Prova Escrita – 1ª chamada

2002.01.11

1.

2.

3.

4.

a) $\beta[S(1)] = 4x(1\text{-}1)+1 = 1$

$\beta[J(1,2,1)] = 4x\ \pi[\pi(1\text{-}1,\ 2\text{-}1),1\text{-}1]+3 = 4x\ \pi[2^0x(2x1+1)\text{-}1,\ 0]+3$

$= 4x\ \pi(2,0)+3 = 4x\ [2^2x(2x0+1)\text{-}1]+3 = 15$

$\gamma = 2^1+2^{15+1+1}\text{-}1 = 2+131072\text{-}1=131073$

b) $\phi_i(x) = x+1$

$$\phi_i(x,y) = \begin{cases} x+2, \text{se } x+1 = y \\ x+1, \text{se } x+1 \neq y \end{cases}$$

5.

a) $h(x,y,0) = f(x,y) = x \times y$

$h(x,y,z+1) = g(x,y,z,h(x,y,z)) = (z+1) \times h(x,y,z)$

b)

Programa F			
I1	J(1,4,9)	I6	Z(3)
I2	J(2,3,6)	I7	S(4)
I3	S(3)	I8	J(1,1,1)
I4	S(5)	I9	T(5,1)
I5	J(1,1,2)		

Programa G			
I1	S(3)	I7	S(5)
I2	Z(1)	I8	J(1,1,5)
I3	Z(2)	I9	Z(2)
I4	J(1,4,12)	I10	S(1)
I5	J(2,3,9)	I11	J(1,1,4)
I6	S(2)	I12	T(5,1)

n=2
m = max(ρ(F), ρ(G),n+2) = max(5,5,2+2) = 5
t = m+n = 5+2 = 7

Programa H							
I1	T(1,6)	I11	J(1,1,8)	I21	T(10,4)	I31	Z(2)
I2	T(2,7)	I12	Z(3)	I22	Z(5)	I32	S(1)
I3	T(3,8)	I13	S(4)	I23	S(3)	I33	J(1,1,26)
I4	Z(3)	I14	J(1,1,7)	I24	Z(1)	I34	T(5,1)
I5	Z(4)	I15	T(5,1)	I25	Z(2)	I35	T(1,10)
I6	Z(5)	I16	T(1,10)	I26	J(1,4,34)	I36	S(9)
I7	J(1,4,15)	I17	J(9,8,38)	I27	J(2,3,31)	I37	J(1,1,17)
I8	J(2,3,12)	I18	T(6,1)	I28	S(2)	I38	T(10,1)
I9	S(3)	I19	T(7,2)	I29	S(5)		
I10	S(5)	I20	T(9,3)	I30	J(1,1,27)		

6.

a)

$$g(x)=\begin{cases} f(x), se\neg(\exists y \in N : x = y!) \\ \phi_{\mu y(|x-y!|=0)}(x)+1, se(\exists y \in N : x = y!)\wedge\left(\phi_{\mu y(|x-y!|=0)}(x)\downarrow\right) \\ 0, se(\exists y \in N : x = y!)\wedge\left(\phi_{\mu y(|x-y!|=0)}(x)\uparrow\right) \end{cases}$$

b) Admitindo, por hipótese, que g é computável, então $\exists m \in N_0 : g = \phi_m$

$$g(m!) = \phi_m(m!) = \begin{cases} \phi_m(m!)+1, se\phi_m(m!)\downarrow \\ 0, se\phi_m(m!)\uparrow \end{cases}$$, o que é absurdo $\forall m \in N_0$.

Logo, por redução ao absurdo, g não é computável.