João Mendes Moreira
João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

10ª Aula Prática – Outros Teoremas

10.1. Resolução

Seja a função *f*:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi_x(y) \text{ é um quadrado perfeito,} \\ \text{indefinido} & \text{se } \phi_x(y) \text{ não é um quadrado perfeito.} \end{cases}$$

Sabe-se por teorema que um predicado $M(\mathbf{x})$ é parcialmente decidível se e só se existe uma função computável $g(\mathbf{x})$ tal que: $M(\mathbf{x})$ se e só ($\Leftrightarrow$) se $\mathbf{x} \in Dom(g)$.

Seja $g(x,y)=\mu z(|\phi_x(y)-z^2|=0)$. Mostrando que $g(x,y)$ é computável, e sabendo que $f(x,y)=1 \Leftrightarrow (x,y) \in Dom(g)$ então '$\phi_x(y)$ é um quadrado perfeito' é parcialmente decidível (porquê?).

De seguida mostra-se que a função g é computável, por aplicação de substituição, recursão e minimização.

Se $|x-z^2|$ é computável, então g também o é pelos teoremas da substituição e da minimização (dado que ϕ_x é computável).

A função $x*y$ é computável se a adição o for pois $x*0=0$ e $x*(y+1)=x*y+x$ (0 é computável por ser uma função básica). Como $x+0=x$ e $x+(y+1)=(x+y)+1$ então a adição $x+y$ é computável pelo teorema da recursão e porque a função sucessor é uma função básica. Assim, está provado que $y^2=y*y$ é computável, visto que $x*y$ é computável e por aplicação do teorema da substituição.

Falta provar que $|x-y|$ é computável pois caso o seja também $|\phi_x(y)-z^2|$ o é pelo teorema da substituição. Mas $|x-y|=(x \dot{-} y)+(y \dot{-} x)$. Como já se provou que $x+y$ é computável, basta provar que $(x \dot{-} y)$ é computável pois, caso o seja, $|x-y|$ também o é pelo teorema da substituição. Para provar que $x \dot{-} y$ é computável basta provar que $x \dot{-} 1$ também o é, visto que a função $x \dot{-} y$ pode ser definida por recursão a partir de $x \dot{-} 0=x$ e $x \dot{-} (y+1)=(x \dot{-} y) \dot{-} 1$. Como $x \dot{-} 1$ é definida por $0 \dot{-} 1=0$ e $(x+1) \dot{-} 1=x$, então é computável pelo teorema da recursão e porque a função $0(x)$ é uma função básica.

Está assim provado que g é computável e, recorrendo ao teorema acima enunciado, que '$\phi_x(y)$ é um quadrado perfeito' é parcialmente decidível.

10.2. Resolução

Por definição sabemos que $E_x^{(n)} \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists\ z_1, \ldots, z_n\colon\ \phi_x(z_1,\ldots,z_n)$ está definido.Sabe-se também por teorema que se $M(x,z_1,\ldots,z_n)$ é parcialmente decidível então $\exists z_1,\ldots,z_n{:}M(x,z_1,\ldots,z_n)$ também é parcialmente decidível.

Sendo assim, basta provar que '$\psi_U^{(n)}(x,z_1,\ldots,z_n)$ é definido' é parcialmente decidível para concluir que '$\exists z_1,\ldots,z_n$: $\psi_U^{(n)}(x,z_1,\ldots,z_n)$ é definido' também é.

A função característica parcial de '$\psi_U^{(n)}(x,z_1,\ldots,z_n)$ é definido' é:

$$f(x,z_1,\ldots,z_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } \psi_U^{(n)}(x,z_1,\ldots,z_n) \text{ está definido,} \\ \text{indefinido} & \text{se } \psi_U^{(n)}(x,z_1,\ldots,z_n) \text{ está indefinido.} \end{cases}$$

Por definição, um predicado é parcialmente decidível se a sua função característica parcial for computável. Como $f(x,z_1,\ldots z_n)= s(0(\psi_U^{(n)}(x,z_1,\ldots,z_n)))$ é computável (a partir das funções básicas $0(x)$ e $s(x)$, da função universal $\psi_U^{(n)}$ e do teorema da substituição), então '$\psi_U^{(n)}(x,z_1,\ldots,z_n)$ é definido' é parcialmente decidível. Pelo teorema acima enunciado '$\exists z_1,\ldots,z_n$: $\psi_U^{(n)}(x,z_1,\ldots,z_n)$ é definido' também é parcialmente decidível. Assim, está provado que o predicado $E_x^{(n)} \neq \varnothing$ é parcialmente decidível.

João Mendes Moreira

João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

11ª Aula Prática – Conjuntos Recursivos

11.1. Resolução

$A \oplus B = \{2x : x \in A\} \cup \{2x+1 : x \in B\}$

Sejam $A1=\{2x:x\in A\}$ e $B1=\{2x+1:x\in B\}$

$A1=\{2x:x\in A\}=\{x:$‘$div(2,x)=1 \wedge qt(2,x)\in A$’$\}$

Se ‘$div(2,x)=1$’ e ‘$qt(2,x) \in A$’ são decidíveis então ‘$div(2,x)=1 \wedge qt(2,x) \in A$’ também é decicível (álgebra da decidibilidade). Logo, A1 é recursivo.

A função característica de ‘$div(2,x)=1$’ coincide com a definição da função $div(2,x)$ que se sabe, por teorema, que é computável. Logo, ‘$div(2,x)=1$’ é decidível.

Como ‘$x\in A$’ é decidível (pois A é recursivo) então a sua função característica é computável. Como $c_A(x)$ é computável, $qt(2,x)$ é computável (por teorema), e ainda pelo teorema da substituição, a função característica de ‘$qt(2,x)\in A$’ ($c_{qt}(x)$) também é computável pois $c_{qt}(x)=c(qt(2,x))$. Logo, ‘$qt(2,x)\in A$’ também é decidível.

Conclui-se que se A é recursivo A1 também é.

$B1=\{2x+1:x\in B\}=\{x:$ ‘$div(2,x)=0 \wedge qt(2,x \dot{-} 1) \in B$’$\}$

Se ‘$div(2,x)=0$’ e ‘$qt(2,x \dot{-} 1)\in B$’ são decidíveis então ‘$div(2,x)=0 \wedge qt(2,x \dot{-} 1) \in B$’ também é decicível (álgebra da decidibilidade). Logo, B1 é recursivo.

Como ‘$div(2,x)=1$’ é decidível e ‘$div(2,x)=0$’ = ‘NOT $div(2,x)=1$’ então ‘$div(2,x)=0$’ também é decidível (álgebra da decidibilidade).

Como ‘$x\in B$’ é decidível (pois B é recursivo) então a sua função característica é computável. Como $c_B(x)$ é computável, $qt(2,x \dot{-} 1)$ é computável (por teorema, porque $x \dot{-} 1$ é computável e pelo teorema da substituição), e ainda pelo teorema da substituição, a função característica de ‘$qt(2,x \dot{-} 1)\in B$’ ($c_{qt}(x)$) também é computável pois $c_{qt}(x)=c(qt(2,x \dot{-} 1))$. Logo, ‘$qt(2,x \dot{-} 1)\in B$’ também é decidível.

Conclui-se que se B é recursivo B1 também é.

Se A1 e B1 são recursivos então $A\oplus B=A1\cup B1$ também é (por teorema).

11.2. Resolução

$A\otimes B=\{\pi(x,y): x\in A \wedge x\in B\}=\{x:\pi_1(x) \in A \wedge \pi_2(x) \in B\}$

Se A é recursivo então $x\in A$ é decidível. Como $\pi_1(x)$ é computável e total então $\pi_1(x) \in A$ é decidível pelo teorema da substituição.

Se B é recursivo então $x\in B$ é decidível. Como $\pi_2(x)$ é computável e total então $\pi_2(x) \in B$ é decidível pelo teorema da substituição.

Sabe-se por teorema (álgebra da decidibilidade) que a conjunção de dois predicados decidíveis também é decidível. Assim $A\otimes B$ é recursivo.

11.3. Resolução

O conjunto A é recursivo enumerável caso 'ϕ_x é não injectiva' seja parcialmente decidível. 'ϕ_x é não injectiva' é equivalente a dizer que '$\exists y_1,y_2$: $\phi_x(y_1)=\phi_x(y_2)$', ou seja, '$\exists y_1,y_2$: $|\phi_x(y_1)-\phi_x(y_2)|=0$'. Seja $f(y_1,y_2)=|\phi_x(y_1)-\phi_x(y_2)|$, se $f(y_1,y_2)$ é computável então $\exists i$: $f(y_1,y_2)=\phi_i(y_1,y_2)$. Mostrando que '$\psi_U^{(2)}(i,y_1,y_2)=0$' é parcialmente decidível então '$\exists y_1,y_2$: $\psi_U^{(2)}=0$' também é (por teorema).

$f(y_1,y_2)$ é computável (ver 1º exercício da aula nº11), logo $\exists i$: $f(y_1,y_2)=\phi_i(y_1,y_2)$. '$\psi_U^{(2)}(i,y_1,y_2)=0$' é parcialmente decidível pois a sua função característica parcial g é computável. De facto, $g(x,y_1,y_2)=s\{\mu z[\psi_U^{(2)}(x,y_1,y_2)=0]\}$ que é computável pois a função universal é computável e como tal, $\mu z[\psi_U^{(2)}(x,y_1,y_2)=0]$ também é computável. Como a função básica $s(x)$ é computável então, pelo teorema da substituição $s\{\mu z[\psi_U^{(2)}(x,y_1,y_2)=0]\}$ também o é.

Como '$\mu z[\psi_U^{(2)}(i,y_1,y_2)=0]$' é parcialmente decidível então '$\exists y_1,y_2$: $\psi_U^{(2)}(i,y_1,y_2)=0$' também o é (por teorema). Ou seja, '$\exists y_1,y_2$: $\phi_i^{(2)}=0$' é parcialmente decidível. Ou ainda, '$\exists y_1,y_2$: $f(y_1,y_2)=0$' é parcialmente decidível, o que é equivalente a dizer que '$\exists y_1,y_2$: $\phi_x(y_1)=\phi_x(y_2)$', ou seja 'ϕ_x é não injectiva' é parcialmente decidível. Logo, A é recursivo enumerável.