

Processamento de Sinal

Conceitos, Métodos e Aplicações

**Texto Tutorial da Disciplina:
APSI - LEEC**

J.P. Marques de Sá – jmsa@fe.up.pt
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
© 2001 J.P. Marques de Sá

ÍNDICE

1	Noções Fundamentais de PDS (Revisão).....	5
1.1	Sinais e Sistemas Discretos	5
1.1.1	Génese e Representação dos Sinais Discretos	5
1.1.2	Tipificação de Sistemas Discretos	12
1.2	Transformadas	19
1.2.1	Descrição nas Frequências de Sinais Contínuos	19
1.2.2	Descrição nas Frequências de Sinais Discretos	29
1.2.3	Amostragem	32
1.2.4	Reconstrução de Sinal	41
1.2.5	Transformada de Fourier de Sinais Discretos	43
1.2.6	Transformada Discreta de Fourier	54
1.2.7	Transformada em z	58
1.3	Processamento de Sinal com SLITs.....	67
1.3.1	Resposta	67
1.3.2	Estabilidade de SLITs	73
1.4	Energia, Potência, Correlação e Autocorrelação	80
1.5	Bibliografia	89

Símbolos

x	variável
x^*	conjugado de x
$x(t)$	sinal contínuo
$x(n)$	sinal discreto
$X(\Omega)$	Transformada de Fourier de sinais contínuos
$X(\omega)$	Transformada de Fourier de sinais contínuos
N	número de amostras
T	período
f	frequência (Hz)
f_l	frequência de corte inferior
f_c	frequência de corte superior
Ω	frequência angular ($= 2\pi f$ radianos) para sinais contínuos
ω	frequência angular ($= 2\pi f$ radianos) para sinais discretos
$t(n)$	degrau de Heaviside, discreto
$\delta(n)$	impulso de Dirac, discreto
$\text{sinc}(x)$	seno cardinal de x ($\sin(x)/x$)
$\otimes$	operador de convolução
$\rightarrow$	tende para
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	em correspondência com
$\equiv$	definida por, equivalente a

Abreviaturas

PDS	Processamento Digital de Sinal
sse	se e só se
dB	decibel

1 Noções Fundamentais de PDS (Revisão)

1.1 Sinais e Sistemas Discretos

1.1.1 Génese e Representação dos Sinais Discretos

- Amostragem e quantificação de sinais contínuos (conversão A/D) para processamento automático.
- Sequências resultantes de modelos matemáticos de fenómenos reais (p. ex. modelo de crescimento de uma população: $p(n+1) = kp(n)(1-p(n))$, $k > 0$).
- Sequências provenientes de dados reais (p. ex. temperatura máxima diária).

Consideramos que cada valor discreto dista do seguinte do mesmo intervalo de tempo: período (taxa) de amostragem constante, T_s .

T_s : Período de amostragem (s)

$f_s = \frac{1}{T_s}$: Frequência de amostragem (Hz) (uma amostra em cada T_s segundos)

Na análise harmónica de sinais discretos (ver Figura 1.1) usamos o conceito de frequência angular:

$$\omega_0 = 2\pi f_0: \text{ Frequência angular (radianos)}$$

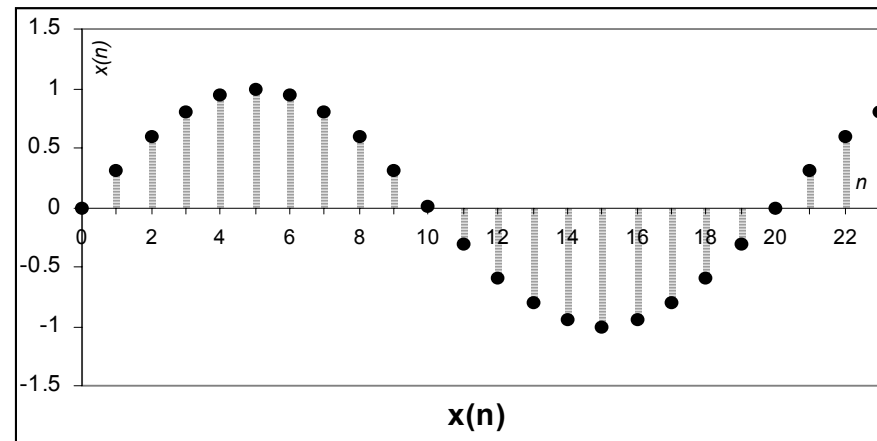


Figura 1.1. Um seno discretizado com $f_0/f_s = 0.05$.

$$x(n) = a \sin(\omega_0 n T_s) = a \sin(2\pi f_0 \frac{n}{f_s}), \quad -\infty < n < +\infty$$

Todos os sinais discretos se podem representar facilmente à custa de somas de *impulsos de Dirac discretos*:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(n - k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

Dado um sinal não causal $x(n)$, estudamos, por vezes, a versão *causal* de $x(n)$, $x(n)u(n)$,

com $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$, *degrau de Heaviside*

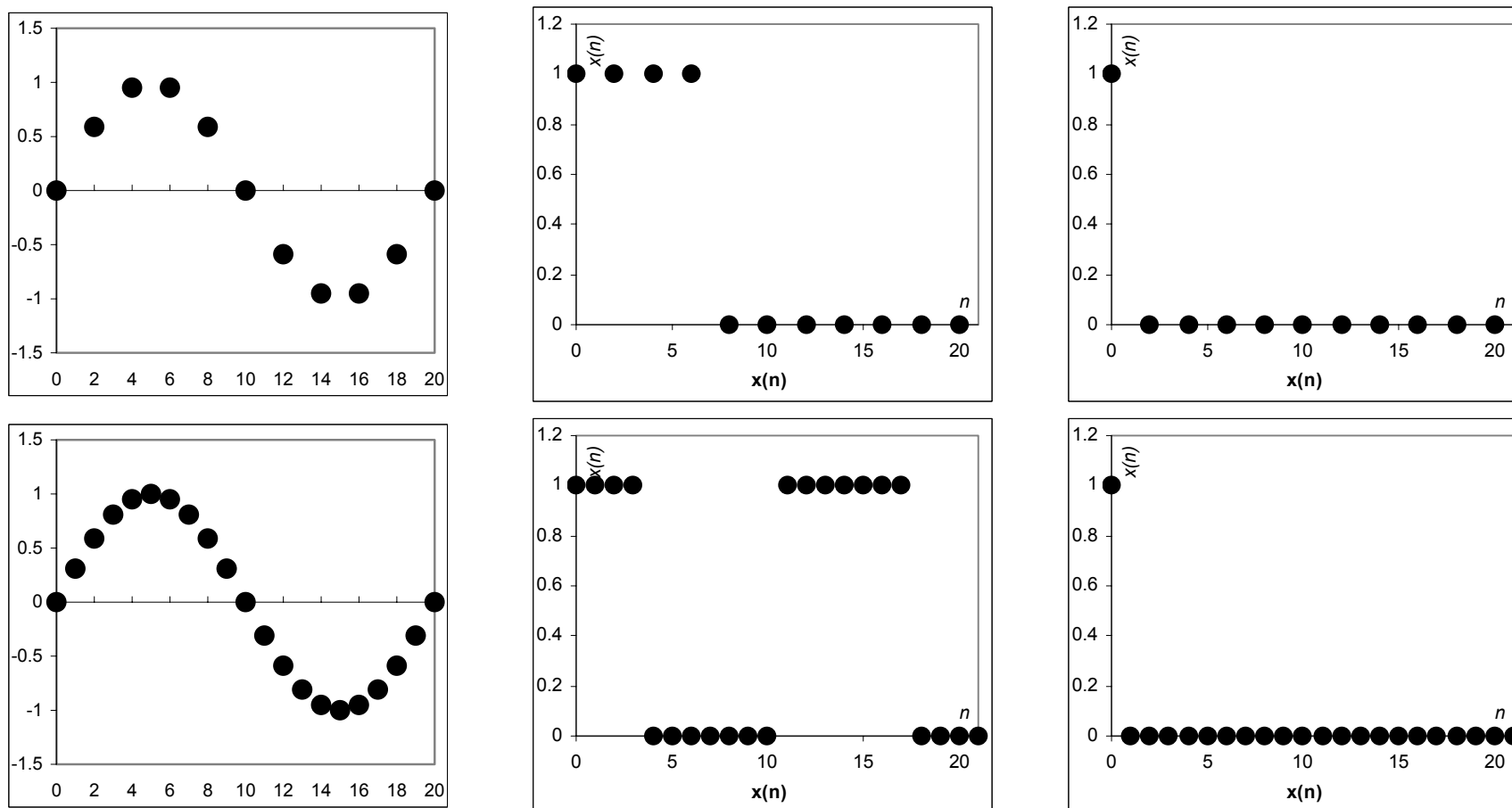


Figura 1.2. Seno, onda quadrada e impulso de Dirac, com $f_0 / f_s = 0.05$, amostrados a $f_s = 0.5$ Hz (esquerda) e $f_s = 1$ Hz (direita).

A discretização A/D de um sinal contínuo implica:

- *Amostragem*
- *Quantificação*

Cada uma destas operações vai impor alterações no sinal.

A amostragem é tratada em 1.2.3.

Quantificação e Erro de Quantificação:

Quantificação de $x(n)$, em um de $A+1$ *níveis de quantificação* de amplitude Δ :

$$x_q(n) \in [0, A\Delta]$$

Supõe-se o *passo de quantificação*, Δ , constante. O *erro de quantificação* é, então:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e_q(n) = x(n) - x_q(n) \leq \frac{\Delta}{2}$$

A *energia* de um sinal discreto é:

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Dado que esta quantidade pode ser infinita, normalmente avaliamos a energia num intervalo finito $[0, N]$:

$$E = \sum_{n=0}^N |x(n)|^2,$$

e calculamos a *potência média*:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N |x(n)|^2$$

Dado um ruído de potência média P_n , define-se *razão sinal-ruído*:

$$SNR = \frac{P}{P_n}; \quad SNR(dB) = 10 \log_{10} \frac{P}{P_n}$$

Supondo que o ruído de quantificação tem uma distribuição uniforme em $[-\Delta/2, \Delta/2]$, temos:

$$P_n = \frac{\Delta^2}{12} \text{ (variância da distribuição uniforme);}$$

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \frac{12P}{\Delta^2}$$

Para uma sinusóide cobrindo $[0, A\Delta]$, temos:

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{A\Delta}{2} \right)^2,$$

logo, a relação sinal-ruído para o erro de quantificação é:

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \frac{12A^2}{8}$$

P. ex. se usamos 8 bits de quantificação, temos $A = 2^8 - 1 = 255$, logo:

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \frac{12 \times (255)^2}{8} \cong 50 \text{ dB}$$

1.1.2 Tipificação de Sistemas Discretos

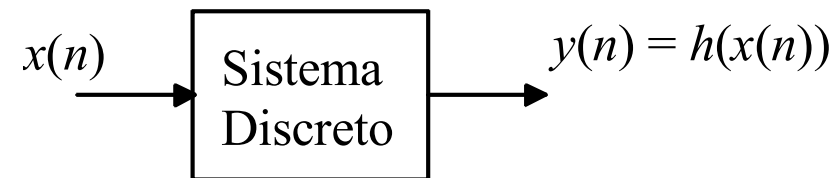


Figura 1.3. Um sistema de processamento de sinais discretos.

Sistemas Lineares:

- $h(x_1(n) + x_2(n)) = h(x_1(n)) + h(x_2(n))$ (*aditividade*)
- $h(a x(n)) = a h(x(n))$ (*escalamento*)

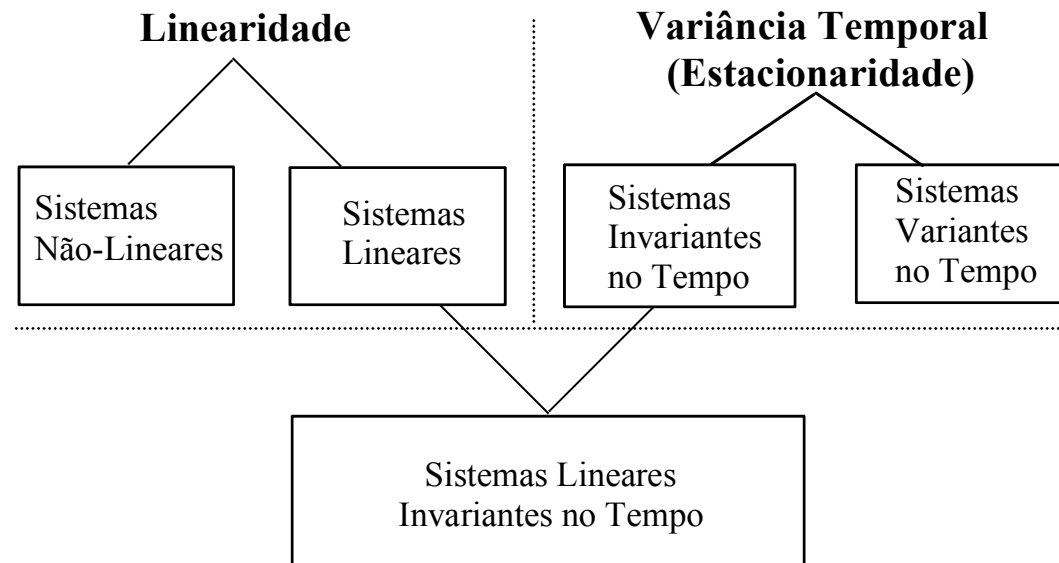
Sistemas Invariantes no Tempo:

$$h(x(n - k)) = y(n - k) \quad \text{com} \quad y(n) = h(x(n))$$

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT):

$$h(a_1x_1(n-k) + a_2x_2(n-k)) = a_1y_1(n-k) + a_2y_2(n-k)$$

$$\text{com } y_1(n) = h(x_1(n)) \text{ e } y_2(n) = h(x_2(n))$$

**Figura 1.4. Classificação de sistemas**

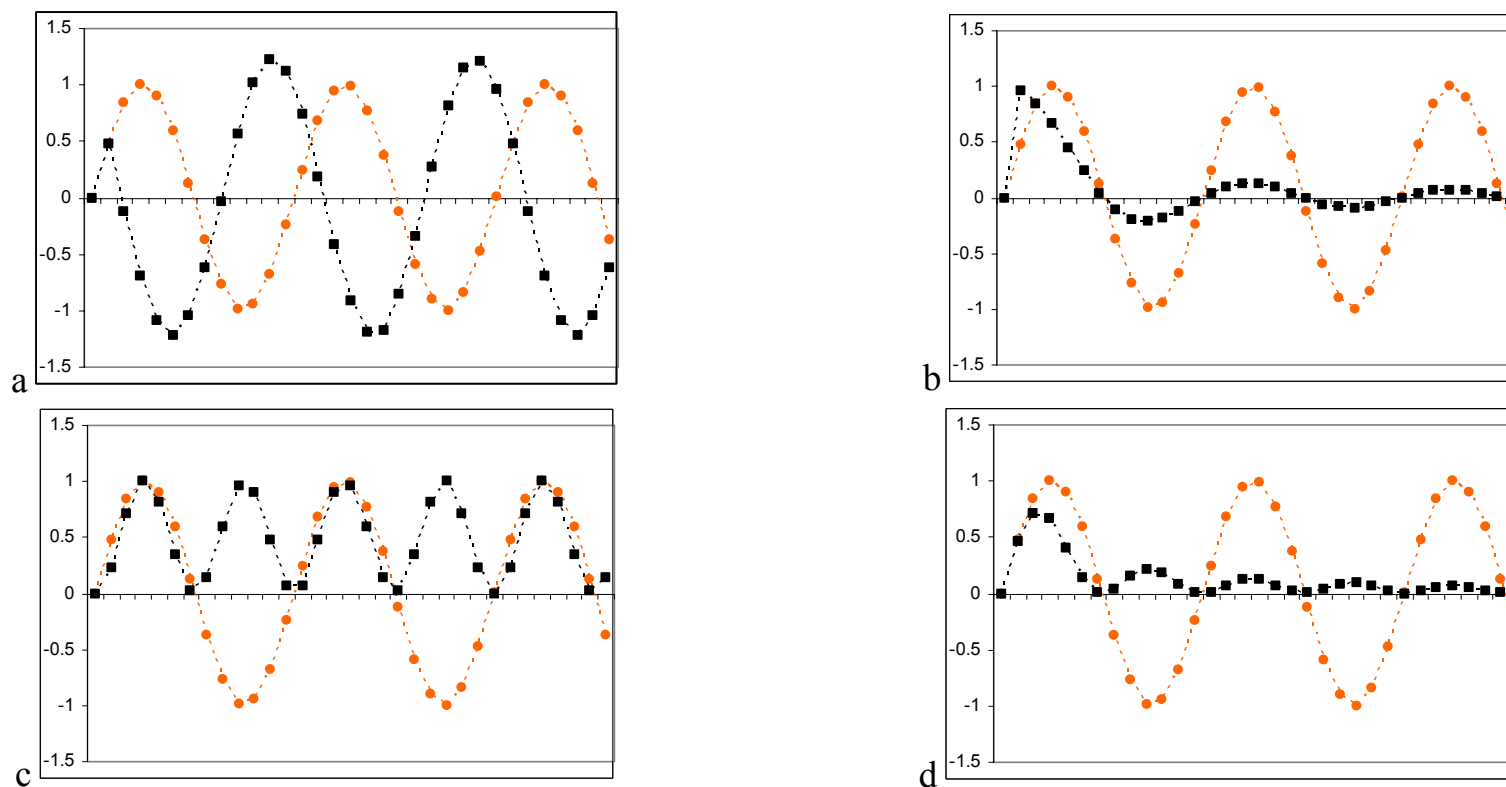


Figura 1.5

	Sistema	$h(x(n))$
a	Linear, invariante no tempo	$x(n) - 2x(n-1)$
b	Linear, variante no tempo	$2x(n)/n$
c	Não-linear, invariante no tempo	$x^2(n)$
d	Não-linear, variante no tempo	$2x^2(n)/n$

Fórmula Geral dos SLIT:

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) = \sum_{j=0}^{M-1} b_j y(n-j) \quad \mathbf{1.1}$$

Propriedades dos SLIT:**□ Resposta de convolução:**

$$y(n) = h(x(n)) = x(n) \otimes h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k),$$

com $h(n) = h(\delta(n))$, *resposta impulsional* do sistema.

A figura seguinte ilustra graficamente a operação de convolução. Notar a reflexão da resposta impulsional imposta por $h(n-k)$. P. ex., para o sinal causal da Figura 1.6, temos: $y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + \dots$

Se os comprimentos do sinal e da resposta forem respectivamente N e M , o comprimento da saída é $N + M - 1$ (confrontar com Figura 1.6).

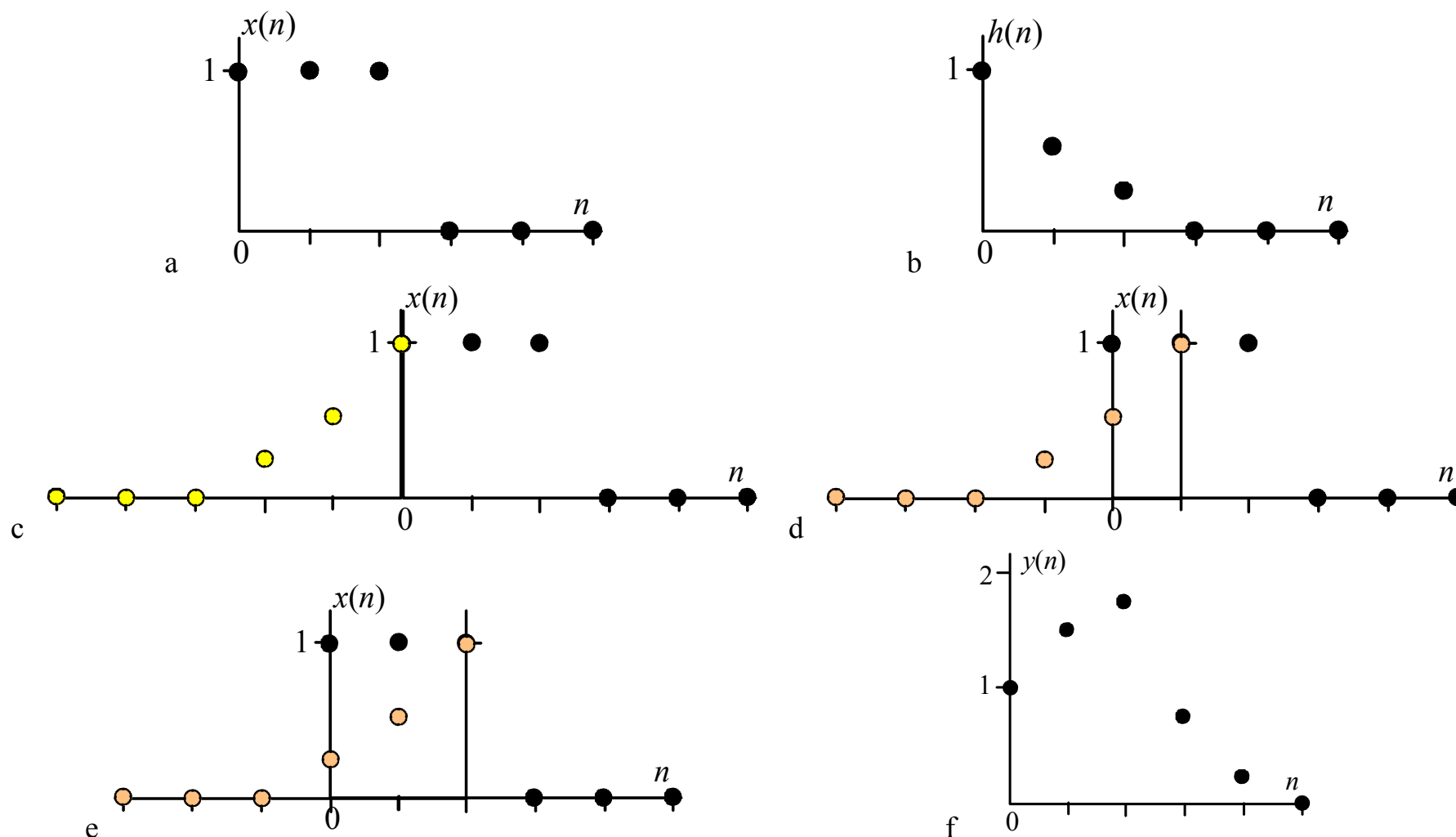


Figura 1.6. Sinal de entrada (a), resposta impulsional do sistema (b), fases da convolução (c: $y(0)$, d: $y(1)$, e: $y(2)$) e saída (f) de comprimento $3 + 3 - 1$.

Esta é a versão discreta da convolução para SLIT contínuo:

$$h(x(t)) = x(t) \otimes h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du$$

Demonstração:

Trivial, tendo em conta que $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$

Notar:

- $x(n) \otimes h(n) = h(n) \otimes x(n)$ comutatividade (logo, $h(x(n)) = x(h(n))$)
- $h(x(n)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)$ para sinais causais

Exemplo:

$$h(n) = [0.5 \quad -0.2 \quad 0.1 \quad 0]$$

$x(n)$: onda quadrada (causal)

sinal de saída, $y(n)$

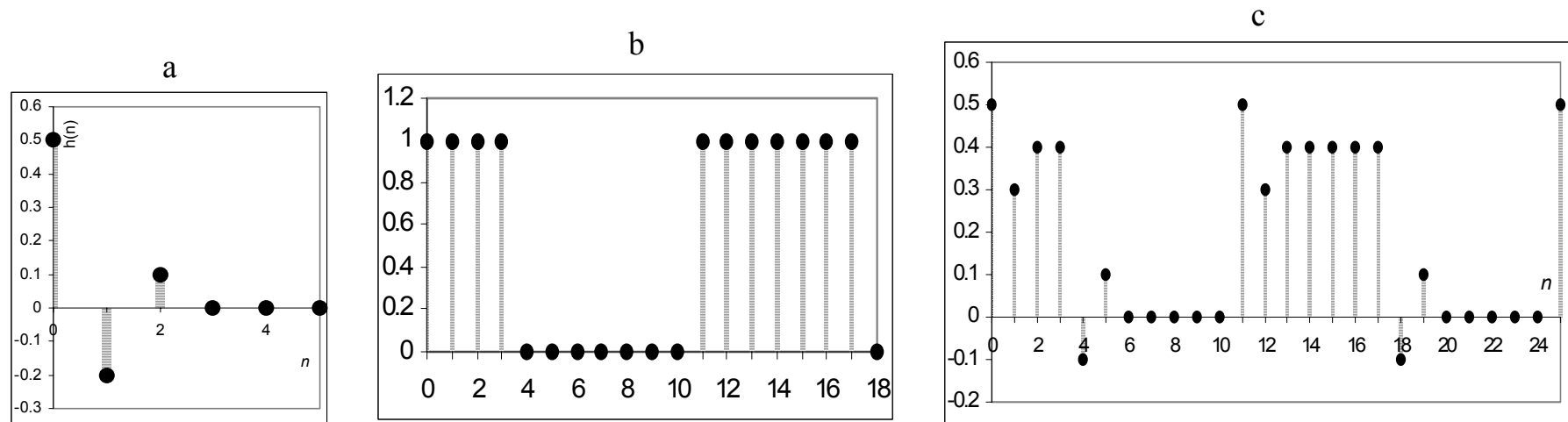


Figura 1.7. Uma resposta impulsional (a), um sinal de entrada (b) e respectiva saída (c).

$$y(1) = x(1)h(1-1) = 1 \times 0.5 = 0.5$$

$$y(2) = x(1)h(2-1) + x(2)h(2-2) = 1 \times (-0.2) + 1 \times 0.5 = 0.3$$

$$y(3) = x(1)h(3-1) + x(2)h(3-2) + x(3)h(3-3) = 0.1 - 0.2 + 0.5 = 0.4$$

1.2 Transformadas

1.2.1 Descrição nas Frequências de Sinais Contínuos

Seja $x(t)$ um sinal contínuo e $X(\Omega)$ a Transformada de Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad \Leftrightarrow \quad X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad 1.2$$

De:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (\cos \Omega t - j \sin \Omega t) dt,$$

decorre que:

- Funções pares $\Rightarrow X(\Omega)$ é real
- Funções ímpares $\Rightarrow X(\Omega)$ é imaginário

Também se mostra facilmente que:

- $ax(t) + by(t) \Leftrightarrow aX(\Omega) + bY(\Omega)$
- $x(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$ atraso no tempo
- $x(t) y(t) \Leftrightarrow X(\Omega) \otimes Y(\Omega)$
- $x(t) \otimes y(t) \Leftrightarrow X(\Omega) Y(\Omega)$

Espectros de Fourier importantes:

a) Impulso rectangular

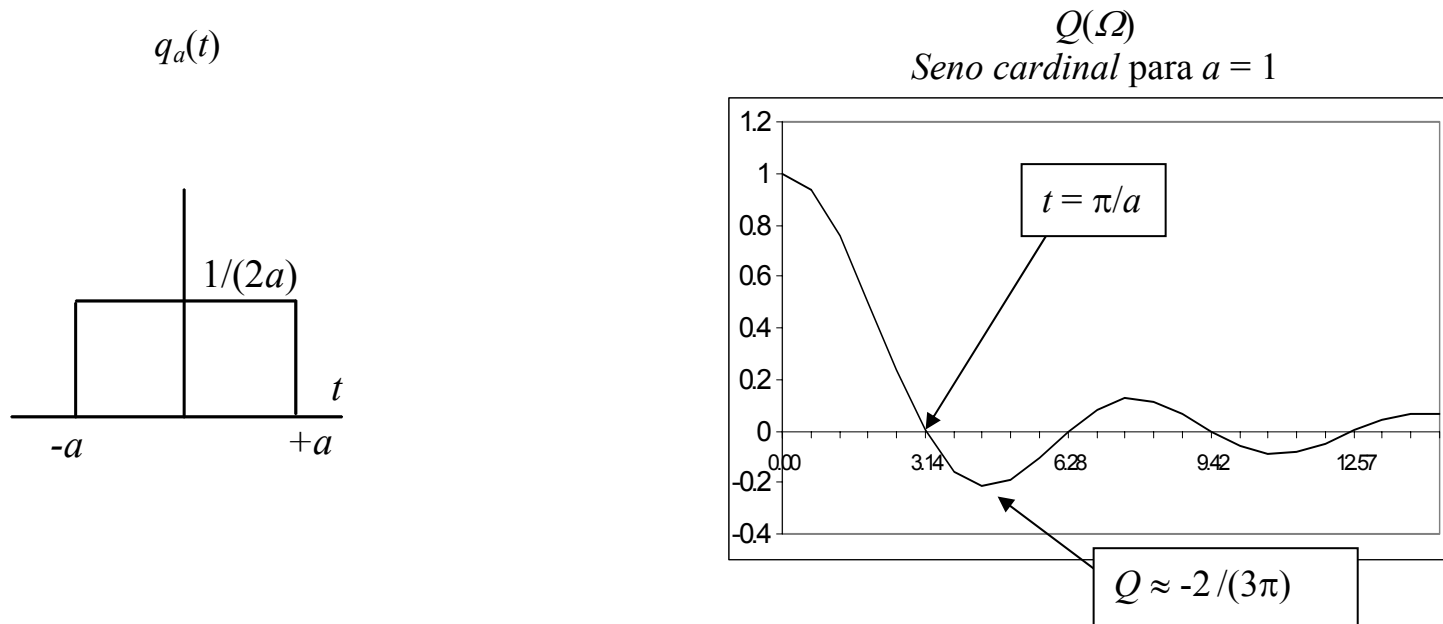


Figura 1.8. Impulso rectangular de área unitária e seu espectro.

$$Q(\Omega) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-j\Omega t} dt = \left[\frac{\sin \Omega t}{\Omega} \right]_{-a}^a = \frac{\sin(\Omega a)}{\Omega} = \text{sinc}(\Omega a) \quad 1.3$$

Notar que $\text{sinc}(0) = 1$.

Família de funções $q_a(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_a(t) dt = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} q_a(t) \varphi(t) dt \xrightarrow{a \rightarrow 0} \varphi(0)$$

Situação para $a \rightarrow 0$: $q_a(t) \rightarrow \delta(t)$ (impulso de Dirac)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \Rightarrow Q(\Omega) = 1$$

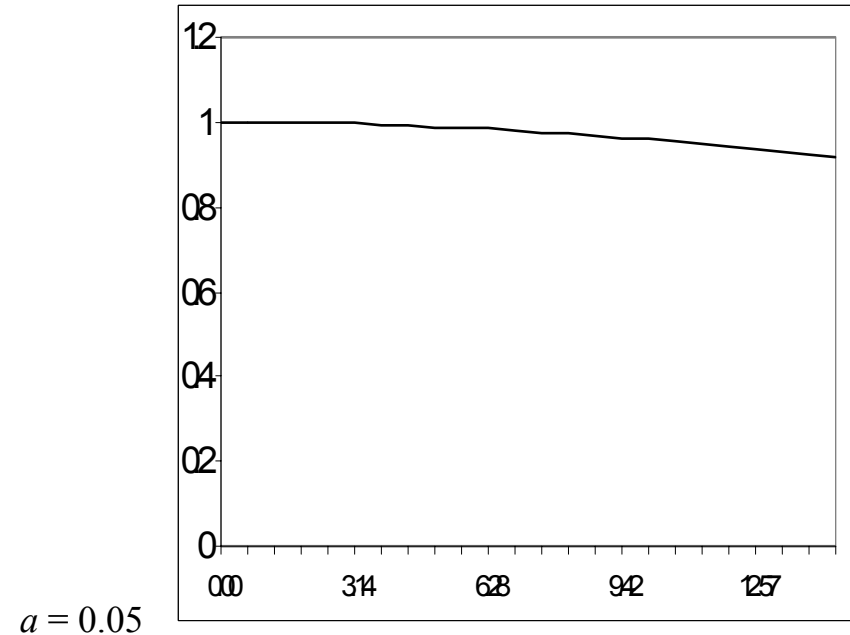
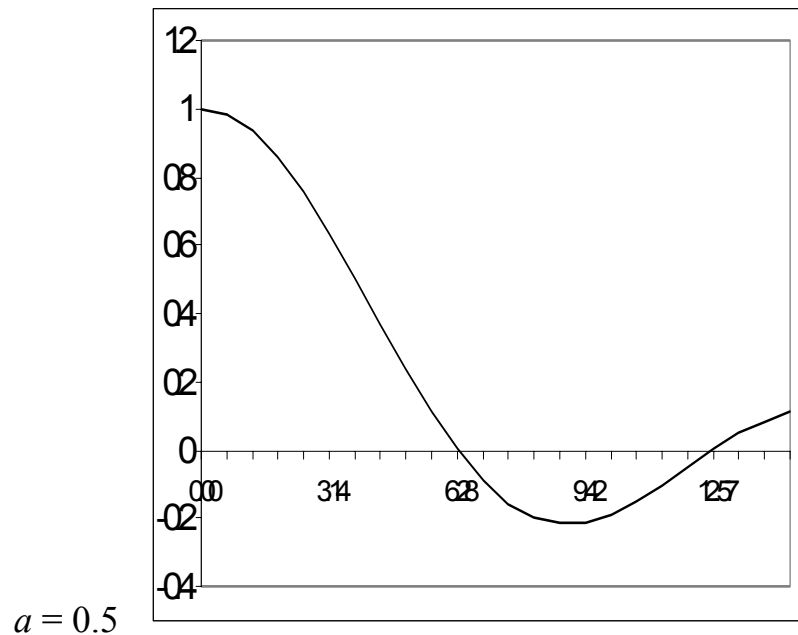


Figura 1.9. Espectro do impulso rectangular de área unitária para valores decrescentes de a .

Família de funções: $2a q_a(t)$

A multiplicação por $2a$ mantém unitária a amplitude dos impulsos. Situação $a \rightarrow \infty$:

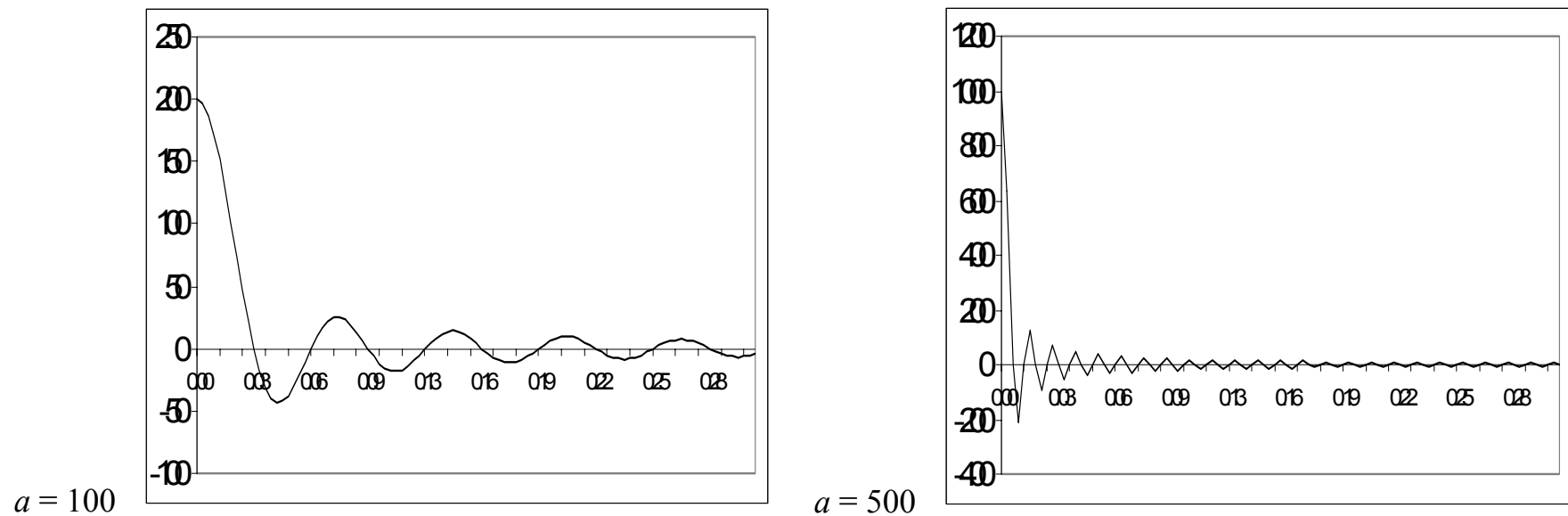


Figura 1.10. Espectro do impulso rectangular de amplitude unitária para valores crescentes de a .

Espectro exhibe lobos com amplitudes crescentes (*fenómeno de Gibbs*), devido às descontinuidades.

Amplitude do primeiro lobo: $\approx -4a/3\pi \rightarrow \infty$

b) Função de Gauss

$$g_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \Leftrightarrow \quad G(\Omega) = e^{-\frac{\Omega^2\sigma^2}{2}}$$

Situação para $\sigma \rightarrow 0$:

$$g_{\sigma}(t) \rightarrow \delta(t); \quad G_{\sigma}(\Omega) \rightarrow 1$$

Seja:

$$g_{\sigma}(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \Leftrightarrow \quad G_{\sigma}(\Omega) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{\Omega^2\sigma^2}{2}}$$

Situação para $\sigma \rightarrow \infty$:

$$g_{\sigma}(t) \rightarrow 1; \quad G_{\sigma}(\Omega) \rightarrow \delta(\Omega)$$

(dualidade tempo-frequência)

c) Suavização de discontinuidades usando o impulso de Gauss

Seja:

$$2ag_{\sigma}(t) \otimes q_a(t) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \frac{\sin(\Omega a)}{\Omega} e^{-\frac{\Omega^2 \sigma^2}{2}}$$

Escolhendo, p.ex. $\sigma = a/10$ o fenómeno de Gibbs é atenuado, os lobos são decrescentes, obtendo-se então convergência para o impulso de Dirac nas frequências.

Situação $\sigma = a/10$ e $a \rightarrow \infty$:

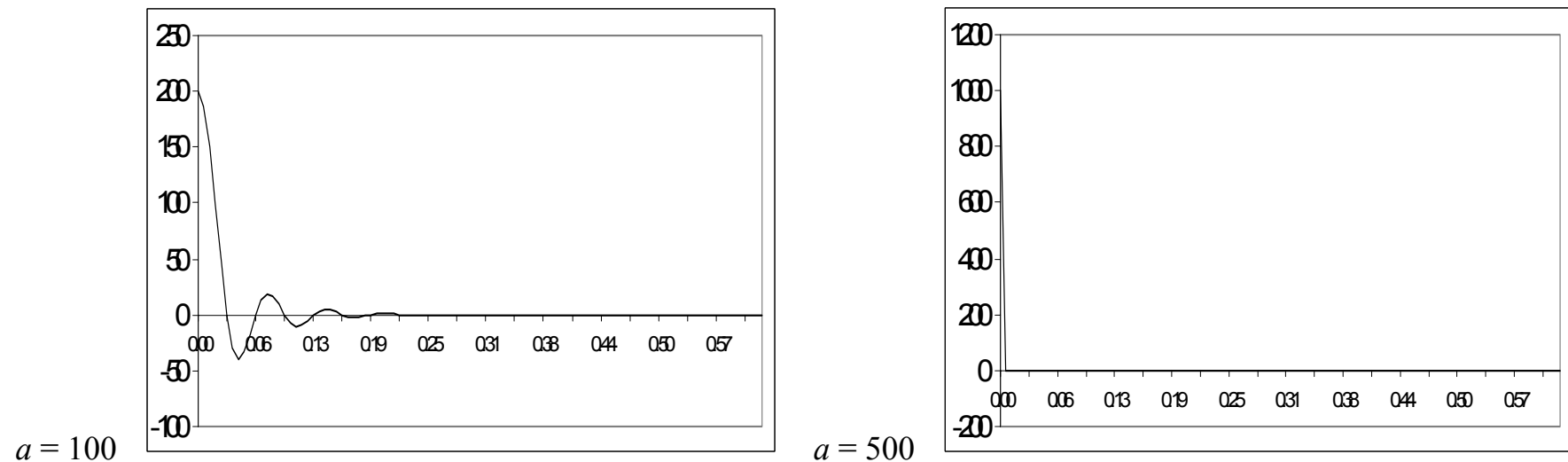


Figura 1.11. Convergência (nas frequências) do impulso rectangular de amplitude unitária, suavizado por uma função de Gauss, para o impulso de Dirac.

d) Espectro de sinusóides

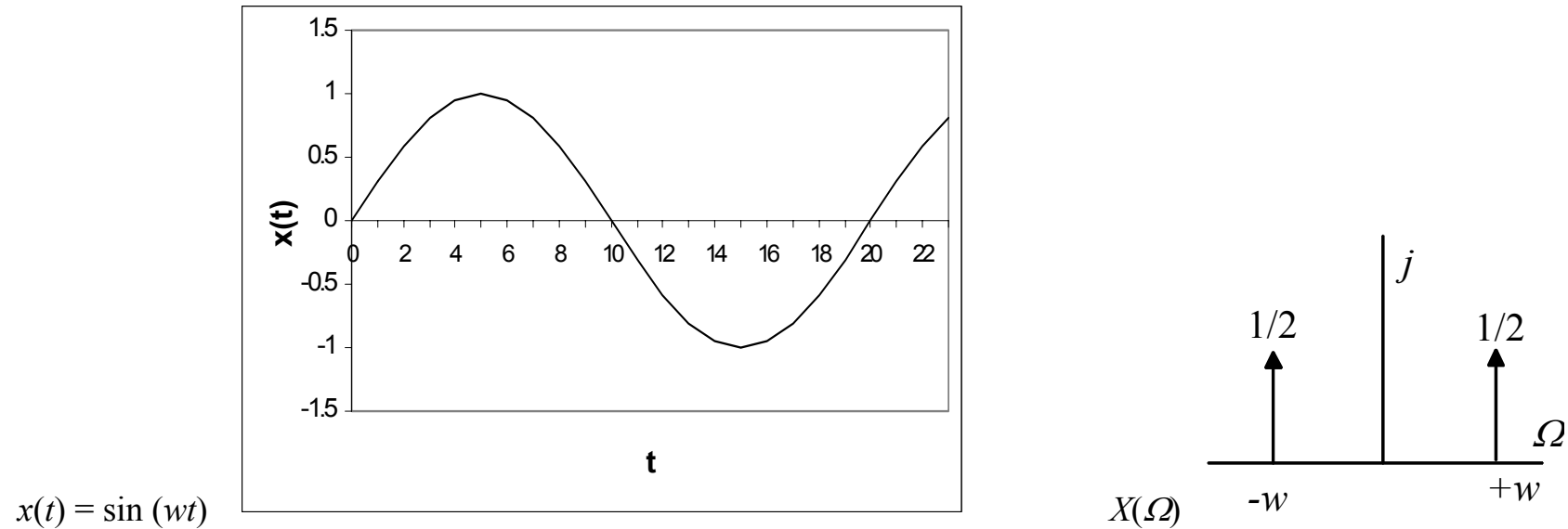


Figura 1.12. Um seno e o seu espectro.

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(wt) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(wt) (\cos \Omega t - j \sin \Omega t) dt$$

Ímpar $\rightarrow 0$

Só $\neq 0$ para $\Omega = \pm w$

Resultado semelhante para cosenos, originando impulsos de Dirac reais.

Sugestão: Efectuar uma análise detalhada do resultado anterior, usando uma função limitada no tempo, $q(t)$.

e) Pente de Dirac

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad \Leftrightarrow \quad P(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega nT_s} \quad 1.4$$

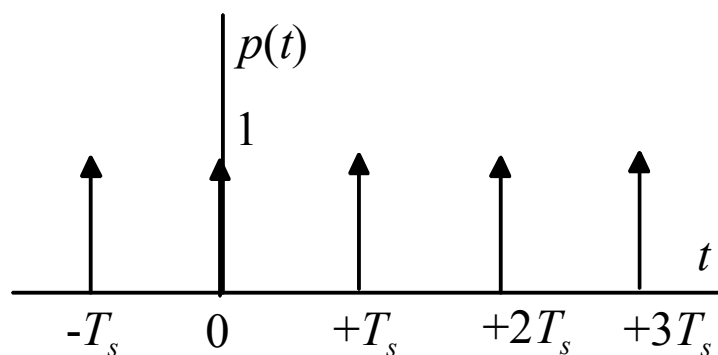


Figura 1.13. Pente de Dirac

Demonstração:

- $\delta(t) \Leftrightarrow C(\Omega) = 1$
- Pela propriedade do atraso temporal, $\delta(t - nk) \Leftrightarrow e^{-j\Omega nk}$

Propriedades da T. Fourier contínua:

$ax(t) + by(t) \Leftrightarrow aX(\Omega) + bY(\Omega)$	Linearidade
$X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$	Dualidade
$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\Omega}{a}\right), \quad a > 0$	Escalamento
$x(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$	Atraso no tempo
$x(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$	Atraso na frequência
$x(t)y(t) \Leftrightarrow X(\Omega) \otimes Y(\Omega)$	Convolução na frequência
$x(t) \otimes y(t) \Leftrightarrow X(\Omega)Y(\Omega)$	Convolução no tempo
$x^{(n)}(t) \Leftrightarrow (j\Omega)^n X(\Omega)$	Diferenciação
$\int_{-\infty}^t x(u)du \Leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)$	Integração

$$x(t) \cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\Omega + \Omega_0) + X(\Omega - \Omega_0)]$$

Modulação

$$x(t) \sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{j}{2} [X(\Omega + \Omega_0) - X(\Omega - \Omega_0)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)Y^*(\Omega)d\omega$$

Teorema de Parseval

Algumas Transformadas Úteis:

$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\Omega}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$
$q_a(t)$	$\frac{\sin \Omega a}{\Omega a}$
$e^{-at}u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{a + j\Omega}$

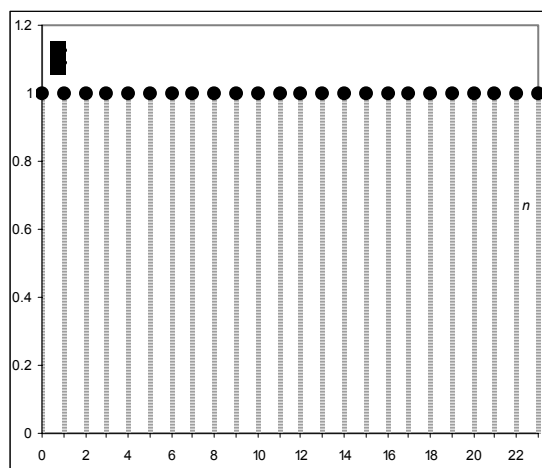
1.2.2 Descrição nas Frequências de Sinais Discretos

Consideremos a descrição de sinusóides em tempo discreto, tomando, sem perda de generalidade, $T_s = 1$ ($f_s = 1$):

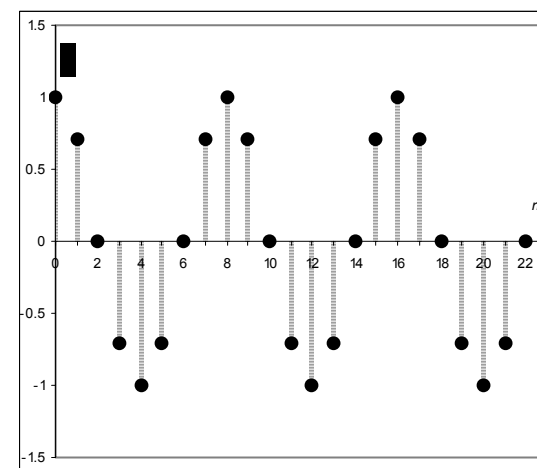
$$x(n) = a \cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty$$

Verifica-se facilmente que:

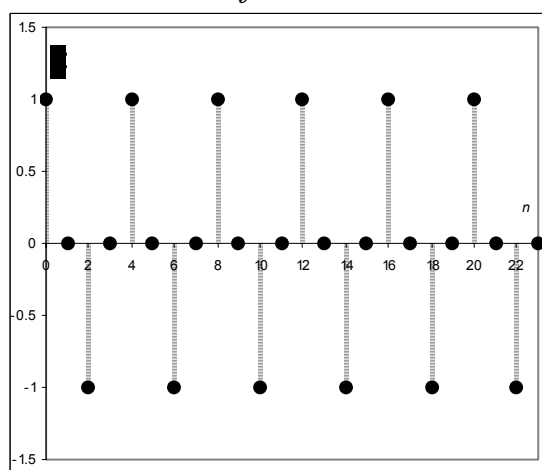
- A sinusóide só é periódica, i.e., $x(n + k) = x(n)$, sse $f = \omega / 2\pi$ for um número racional.
- A maior frequência de oscilação de uma sinusóide discreta ocorre para $\omega = \pm\pi$ (ou $f = \pm 1/2$)



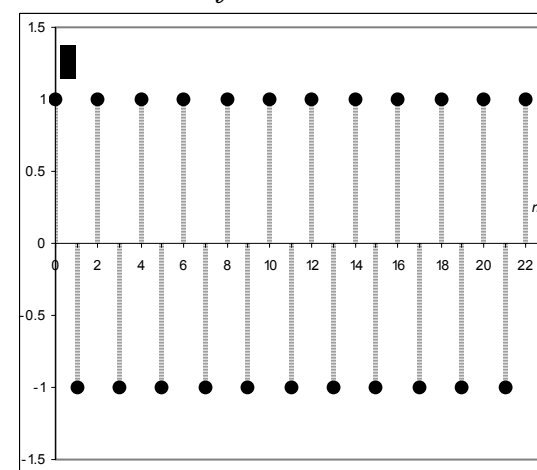
$$f=0$$



$$f=0.125$$



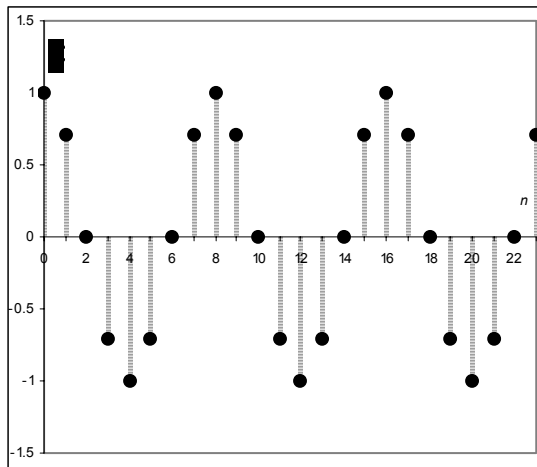
$$f=0.25$$



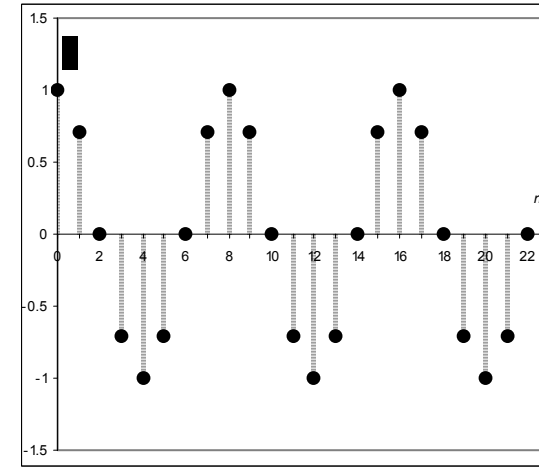
$$f=0.5$$

Figura 1.14. Sinusóides discretas para várias frequências de amostragem.

- Sinusóides cujas frequências angulares diferem de um múltiplo inteiro de 2π (equivalentemente, as *frequências absolutas diferem de um número inteiro*) são idênticas.



$$f_1 = 0.125$$



$$f_2 = -0.875$$

Figura 1.15. Sinusóides discretas cujas frequências diferem de um inteiro: $f_2 = f_1 - 1$

Para sinais discretos desejamos, então, uma descrição nas frequências do tipo:

$$x(n) = \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad 1.5$$

1.2.3 Amostragem

Seja $x(t)$ um sinal contínuo e $x(n)$ uma sua versão discreta (com $T_s = 1$).

Usando o pente de Dirac (1.4) e aplicando a transformada inversa (1.2), temos:

$$x(n) = p(t) \otimes x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} d\Omega$$

Dividindo o intervalo de integração em sub-intervalos de largura 2π , temos:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} X(\Omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} d\Omega$$

As sinusóides discretas com atrasos múltiplos de 2π são idênticas, logo podemos rescrever a expressão anterior como:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + n2\pi) \right] e^{j\omega n} d\omega,$$

com a representação nas frequências $\omega \in [-\pi, \pi]$ em vez de $\Omega \in]-\infty, \infty[$.

Portanto:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

com:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + n2\pi)$$

Obtivemos uma descrição nas frequências como desejávamos (1.5), sendo:

A resposta nas frequências de um sinal discreto é a soma de um número infinito de translações da resposta nas frequências do respectivo sinal contínuo original, para múltiplos da frequência de amostragem.

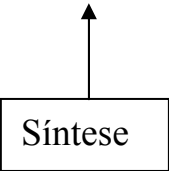
Em geral, para $T_s \neq 1$:

$$x(nT_s) = \frac{T_s}{2\pi} \int_{\pi/T_s}^{\pi/T_s} X(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega$$

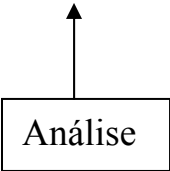
$$X(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + n \frac{2\pi}{T_s})$$

Para sinais discretos, o par de transformadas de Fourier é:

$$x(nT_s) = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} X(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega \Leftrightarrow X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j\omega nT_s} \quad \mathbf{1.6}$$



Síntese



Análise

Dada a periodicidade de $X(\omega)$, basta representar no intervalo $[0, \omega_s[$ ($[0, 2\pi[$ para $T_s = 1$ ou, alternativamente, $[-\pi, \pi[$).

Notas:**1. Aloctonicidade ("Aliasing")**

Da sobreposição de translações de espectros, resulta o *critério de Nyquist* de não distorção espectral do sinal discretizado:

$$f_h < f_s / 2$$

com f_h a maior frequência do espectro do sinal contínuo.

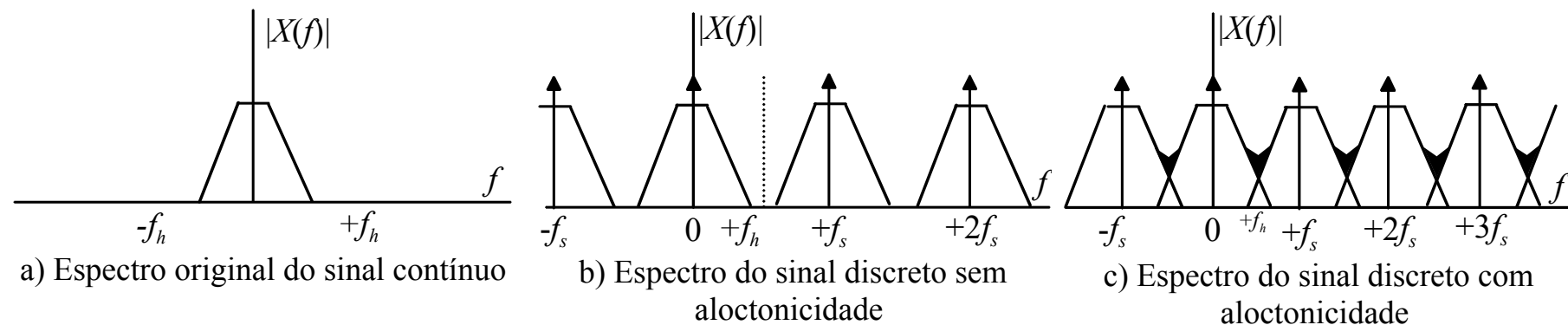


Figura 1.16. Espectro de um sinal contínuo (a) e espectro do sinal discretizado, satisfazendo (b) ou não (c) o critério de Nyquist.

Na prática todos os sinais ao serem discretizados sofrem distorção devido à aloctonicidade. (Porquê?)

2. Espectro do impulso rectangular discreto.

Seja: $T_s = 0.2$; $a = 0.5$ ($2\pi / T_s = 10 \pi$, $\pi / a = 2 \pi$).

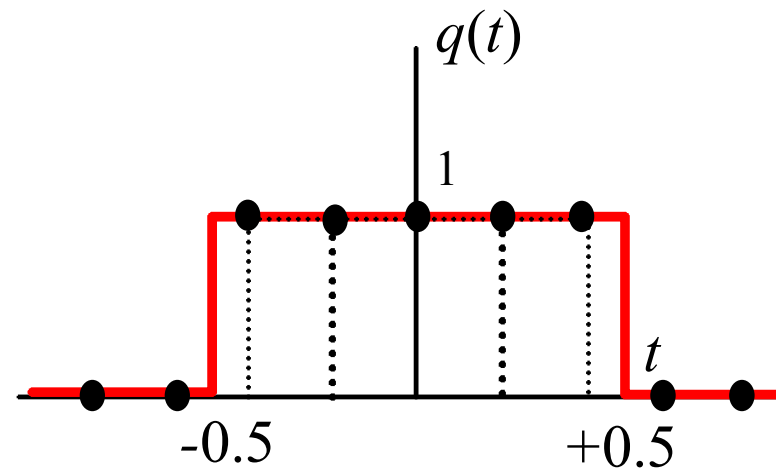


Figura 1.17. Um impulso rectangular de largura $2a = 1$, amostrado com período $T_s = 0.2$.

(Alternativamente podemos efectuar o estudo considerando o período de amostragem unitário, $T_s = 1$, e $2a = 5$. As conclusões, a menos de um factor de escala nas frequências, são as mesmas.)

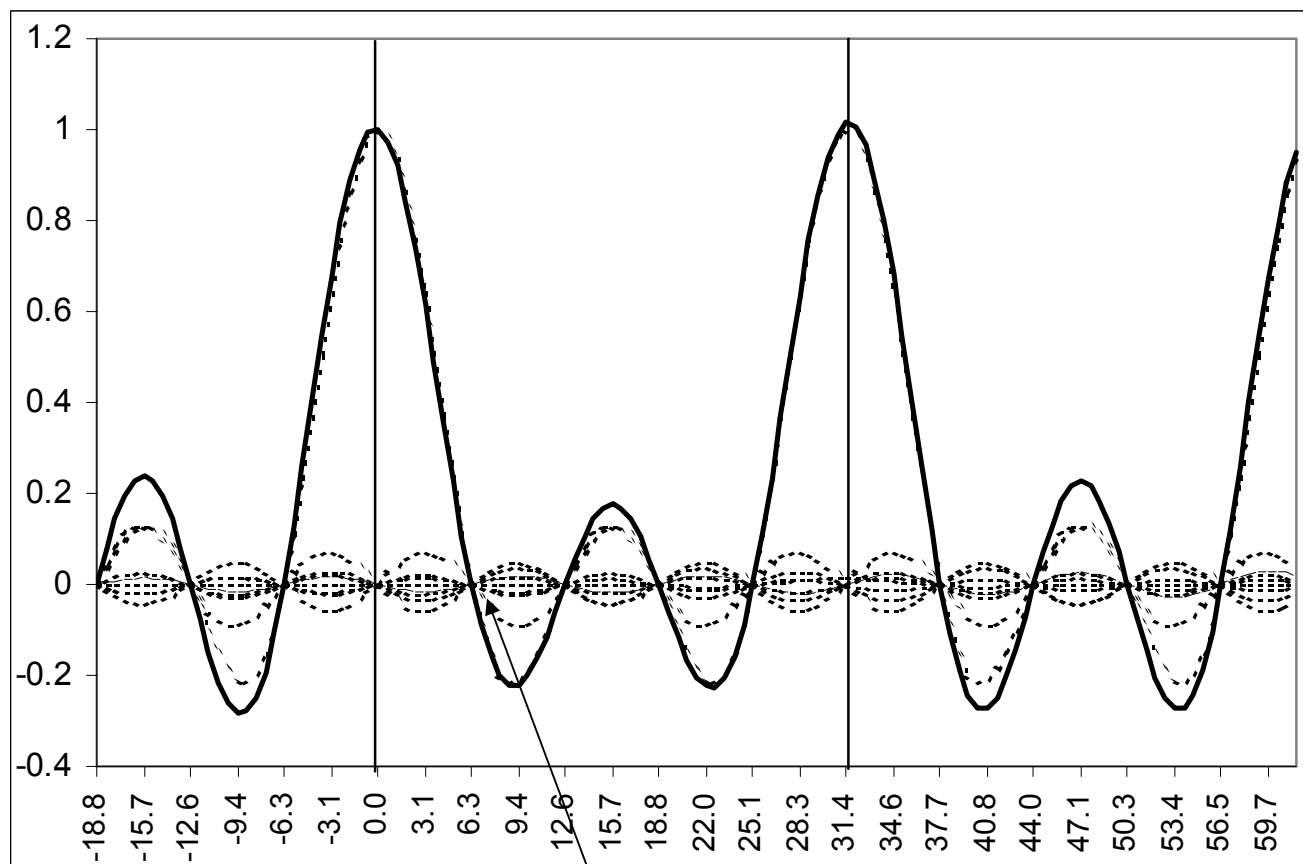
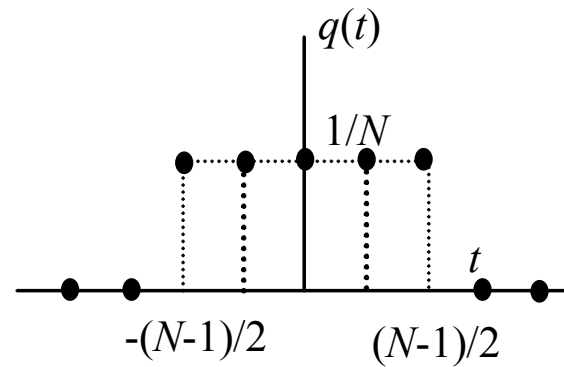


Figura 1.18. Soma de translações do espectro do impulso rectangular, de $n\omega_s$ com $n \in [-4, 4]$.

$$\pi/a = 2\pi$$

Seja o impulso rectangular com N amostras centradas, N ímpar, de amplitude $1/N$ ($T_s = 1$).



Usando 1.4, temos:

$$X(\omega) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \frac{1}{N} e^{-j\omega n} \quad \text{progressão geométrica} = \frac{1}{N} \frac{e^{j\omega \frac{N-1}{2}} - e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}}{1 - e^{-j\omega}}$$

Multiplicando ambos os termos por $e^{j\omega/2}$, obtém-se:

$$X(\omega) = \frac{1}{N} \frac{e^{j\omega \frac{N}{2}} - e^{-j\omega \frac{N}{2}}}{e^{j\omega \frac{1}{2}} - e^{-j\omega \frac{1}{2}}} = \frac{1}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} = \frac{1}{N} \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

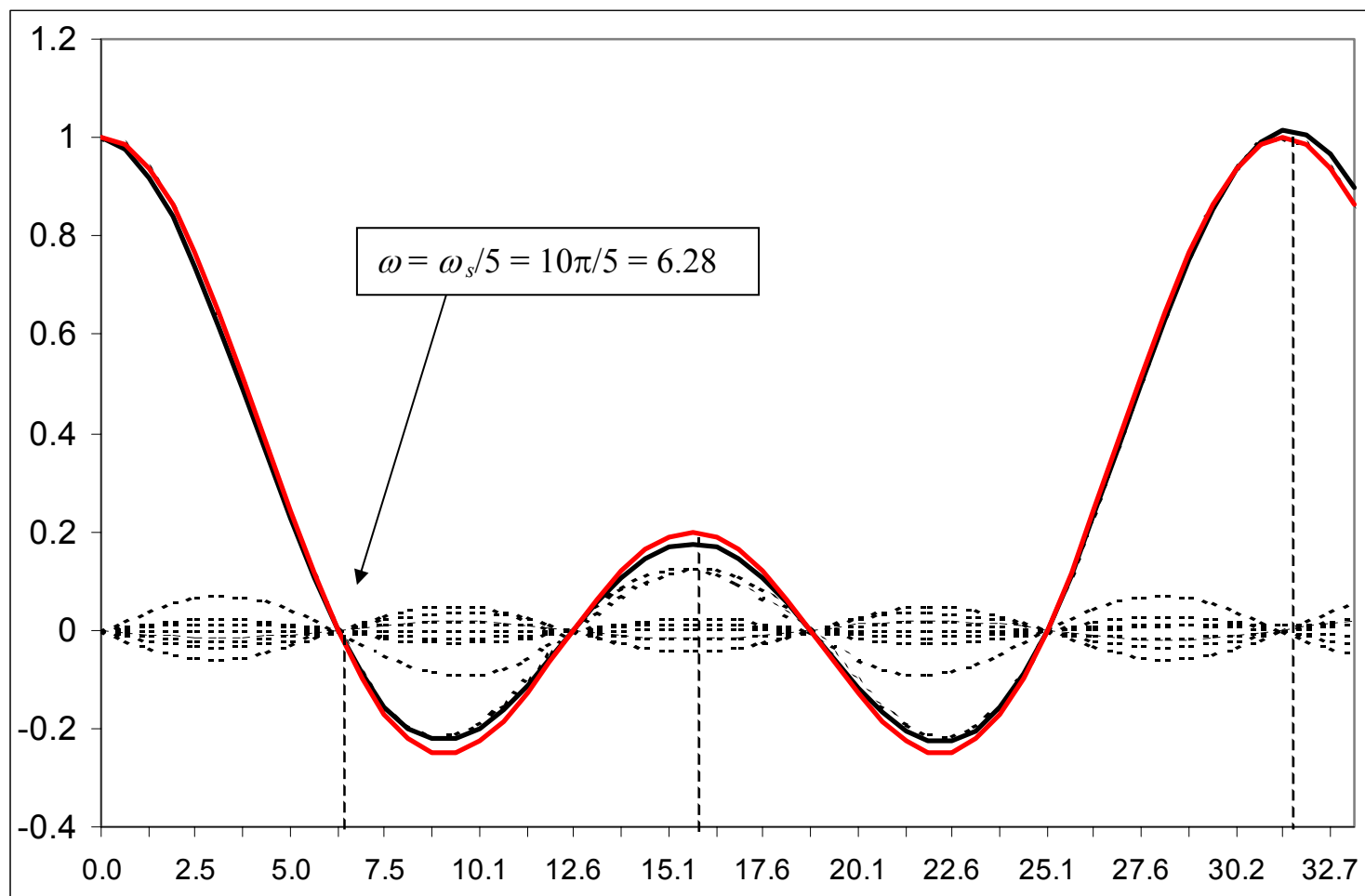


Figura 1.19. Detalhe da figura anterior com o espectro teórico sobreposto (a vermelho).

Notar:

- O espectro de um impulso rectangular discreto é semelhante a um seno cardinal (chama-se função de Dirichlet). A diferença deve-se à aloctonicidade.
- Os zeros do espectro ocorrem para frequência *múltiplas de* $1/N$. Em particular, o primeiro zero ocorre a $f_l = 1/N$.

Para o exemplo anterior, temos:

$$f_l / f_s = \frac{1}{N} \Rightarrow f_l = 1 \Rightarrow \omega_l = 2\pi$$

Seja $X_{f_s}(f)$ o espectro de $x(n)$ para a frequência de amostragem f_s . Então:

$$X_{f_s}(f / f_s) = X_1(f)$$

Usaremos, então, sempre sem perda de generalidade, $f_s = 1$ (*frequência de amostragem normalizada*).

1.2.4 Reconstrução de Sinal

Dado um sinal $x(n)$ qual o sinal $x(t)$ de que proveio?

Supondo o critério de Nyquist satisfeito, a reconstrução de $x(t)$ passa por efectuar a filtragem das réplicas espectrais (ver Figura 1.16) com o *interpolador ideal*:

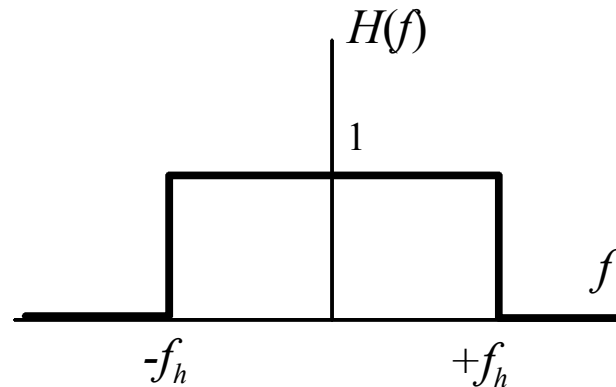


Figura 1.20. Interpolador (filtro passa-baixo) ideal.

$$H(f) \Leftrightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-f_h}^{f_h} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin(2\pi f_h t)}{2\pi f_h t} \quad 1.7$$

Logo:

$$X(f)H(f) \Leftrightarrow x_d(t) \otimes h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(t-n)$$

com $x_d(t)$ versão contínua do sinal discreto $x(n)$.

Se a interpolação é realizada à máxima frequência, $f_h = f_s/2$, temos a reconstrução:

$$x(t) = x_d(t) \otimes h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)}$$

Exemplo:

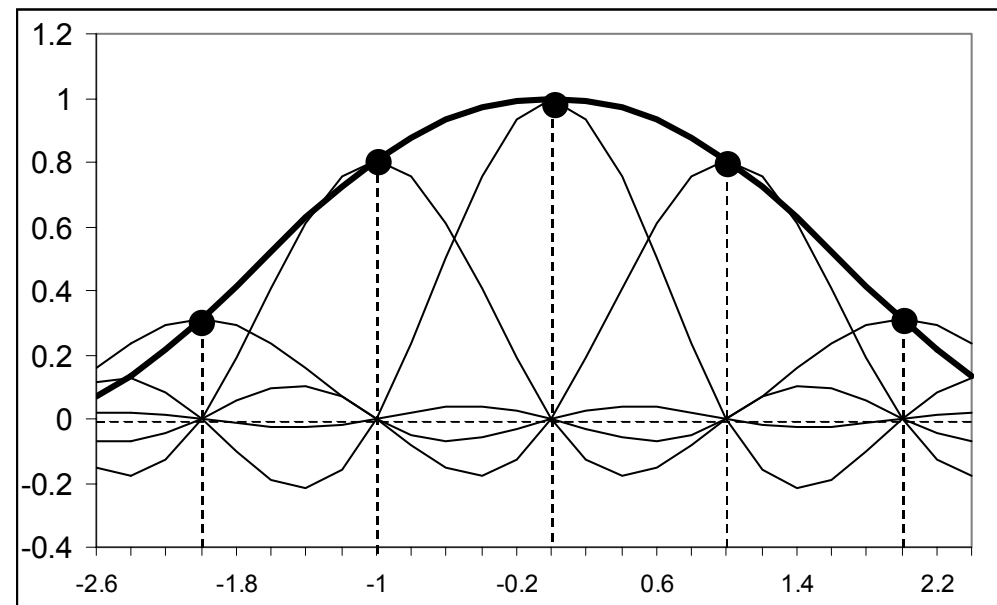


Figura 1.21. Reconstrução de um coseno discretizado. São mostradas apenas cinco funções de interpolação $h(t - n)$, $n \in [-2, 2]$.

Na prática, devido à aloctonicidade há sempre perda de informação, logo nunca é possível recuperar inteiramente o sinal original.

1.2.5 Transformada de Fourier de Sinais Discretos

Propriedades:

$$ax_1(n) + bx_2(n) \Leftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

$$x(n-k) \Leftrightarrow e^{-j\omega k} X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 n} x(n) \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

$$x(-n) \Leftrightarrow X(-\omega)$$

$$x(an) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$x(n) \otimes h(n) \Leftrightarrow X(\omega)H(\omega)$$

$$r_{xy}(l) = x(l) \otimes y(-l) \Leftrightarrow S_{xy}(\omega) = X(\omega)Y(-\omega)$$

$$r_{xx}(l) \Leftrightarrow S_{xx}(\omega)$$

$$x(n)y(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda)Y(\omega - \lambda) d\lambda$$

$$n^k x(n) \Leftrightarrow (j)^k \frac{d^k X(\omega)}{d\omega^k}$$

$$x(n) \cos \omega_0 n \Leftrightarrow \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$$

$$x^*(n) \Leftrightarrow X^*(-\omega)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)^* y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)Y^*(\omega) d\omega$$

Linearidade

Atraso no tempo

Atraso na frequência

Reflexão

Escalamento

Convolução

Correlação

T. Wiener-Khintchine

Multiplicação

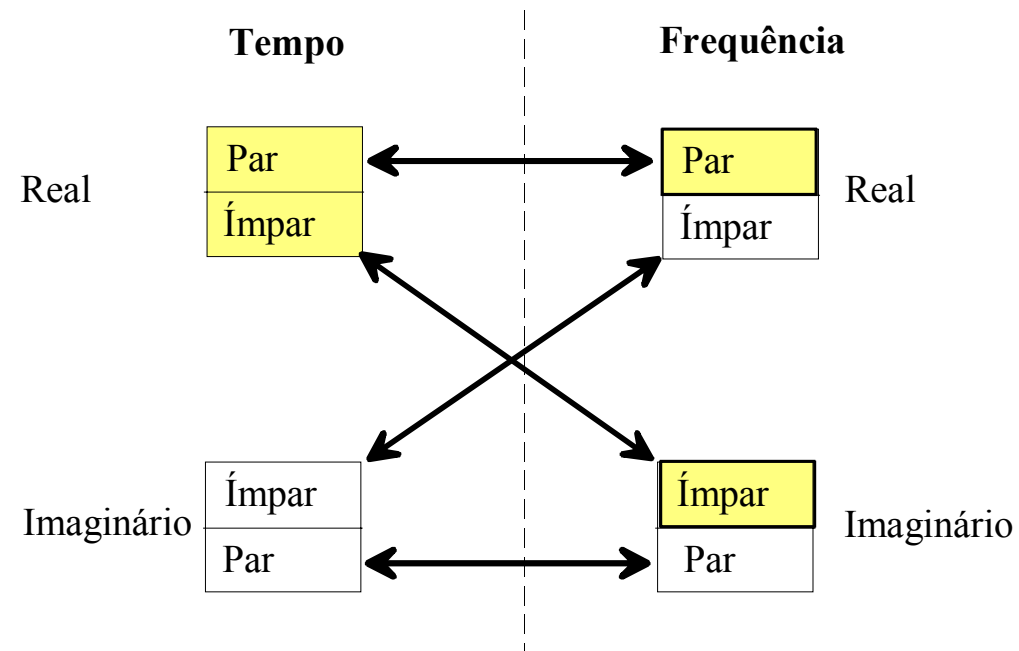
Diferenciação

Modulação

Conjugação

T. Parseval

Simetria:



Algumas transformadas de Fourier úteis:

Sinais aperiódicos

$$x(n) = \delta(n) \Leftrightarrow X(\omega) = 1$$

$$x(n) = \begin{cases} a & |n| \leq L \\ 0 & |n| > L \end{cases} \Leftrightarrow X(\omega) = a \frac{\sin(L + \frac{1}{2})\omega}{\sin(\omega / 2)}$$

$$x(n) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \Leftrightarrow X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad |a| < 1$$

Sinais periódicos

$$x(n) = a \cos \omega_0 n \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{a}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

$$x(n) = a \sin \omega_0 n \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{ja}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(\frac{2\pi}{N})kn} \Leftrightarrow X(\omega)|_{[0,\pi]} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k), \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn}$$

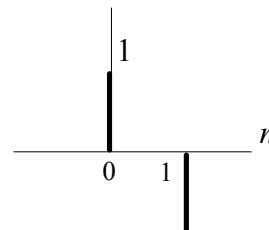
série discreta de Fourier, período N

1.8

Exemplos:

a) SLIT com resposta impulsional:

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$



Este exemplo simples permite ilustrar vários aspectos importantes. Vejamos:

$$x(n) \otimes h(n) = x(n) - x(n-1)$$

Logo, $h(n)$ corresponde à resposta impulsional de um sistema de cálculo de diferenças finitas.

$$X(\omega) = 1 - e^{-j\omega} = (1 - \cos \omega) + j \sin \omega$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{(1 - \cos \omega)^2 + (\sin \omega)^2}$$

$$\angle X(\omega) = \arctg\left(\frac{\sin \omega}{1 - \cos \omega}\right)$$

O sistema proporciona uma aproximação da derivada do sinal.

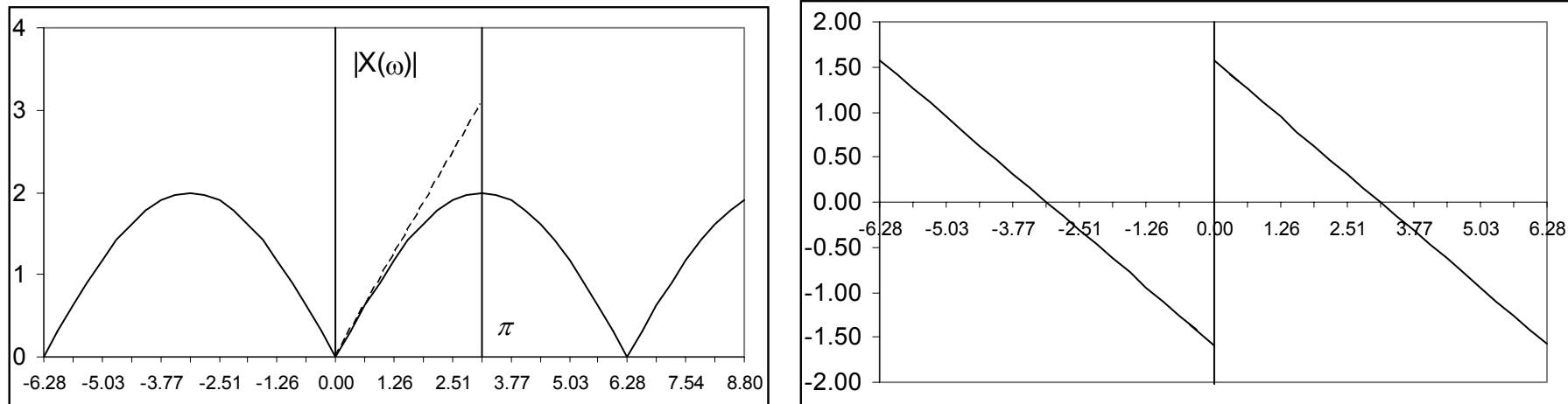


Figura 1.22. Amplitude (esquerda) e fase "enrolada" (direita) da resposta de um sistema de diferenças finitas. A resposta correspondente à derivada está indicada a tracejado.

A fase é linear. Usando a expressão acima com $\arctg$ obtém-se a característica de fase "enrolada" da Figura 1.21, exibindo descontinuidades.

Frequentemente, uma expressão polar é mais elucidativa.

$$X(\omega) = 1 - e^{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega}{2}} (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) = 2je^{-j\frac{\omega}{2}} \sin \omega$$

A fase é, de facto, linear:

$$je^{-j\frac{\omega}{2}} = e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2})} \rightarrow \angle X(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

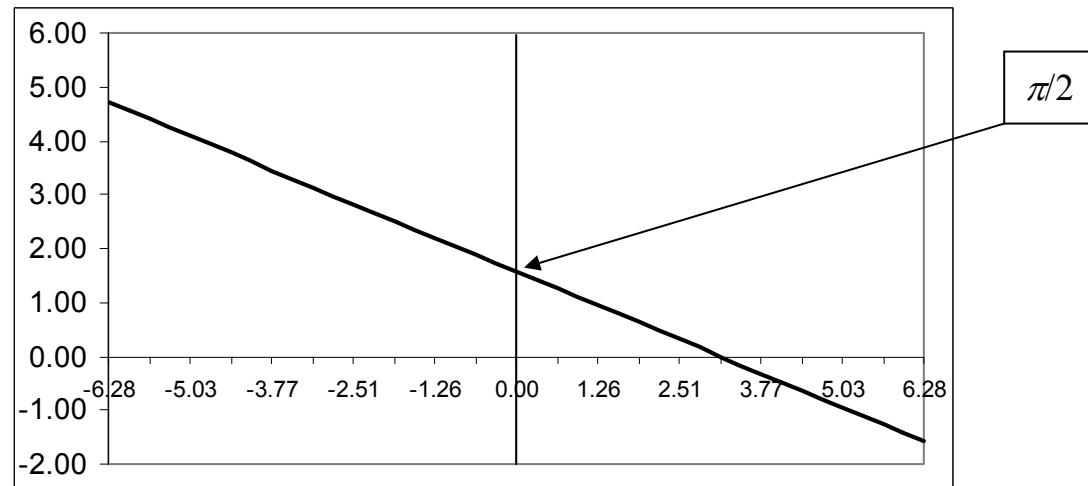
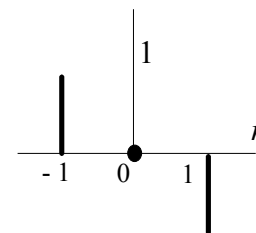


Figura 1.23. Fase ("desenrolada") da resposta de um sistema de diferenças finitas.

Notar o atraso inicial de $\pi/2$, correspondente ao atraso de "meia amostra" para uma versão centrada da resposta, com o comprimento de $N = 2$ amostras. Este atraso é inconveniente do ponto de vista interpretativo e computacional. Prefere-se, assim, um valor *ímpar* de N .

b) SLIT com resposta impulsional:

$$h(n) = \delta(n+1) - \delta(n-1)$$



$$X(\omega) = e^{j\omega} - e^{-j\omega} = 2 \sin \omega$$

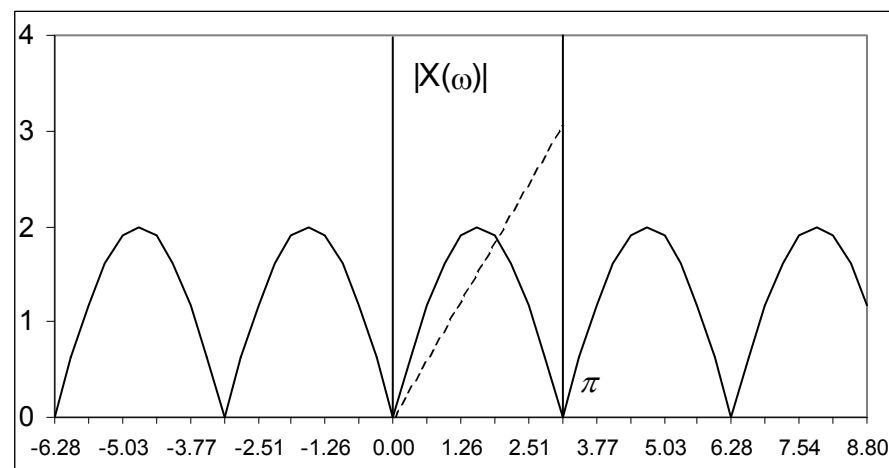


Figura 1.24. Resposta em amplitude de $\delta(n+1) - \delta(n-1)$.

- Versão centrada, não causal: fase nula.
- Versão causal: fase = ω .

$$c) \quad x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad |a| < 1$$

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1 - a \cos \omega) + ja \sin \omega}$$

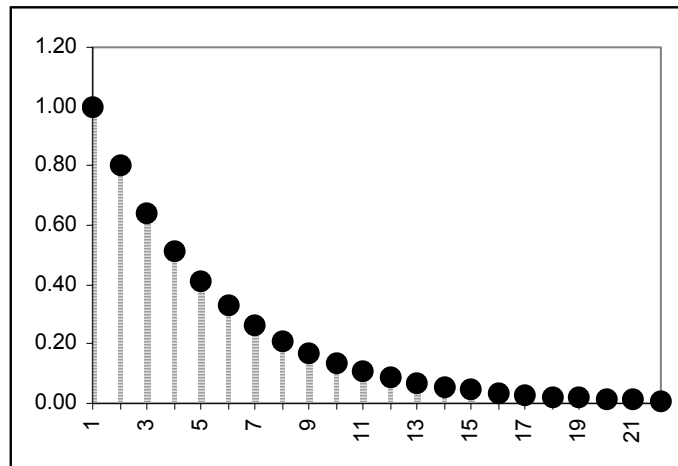


Figura 1.25. Decaimento exponencial a^n com $a = 0.8$

$$|X(\omega)| = \left[(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\angle X(\omega) = \arctg \left(\frac{-a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right)$$

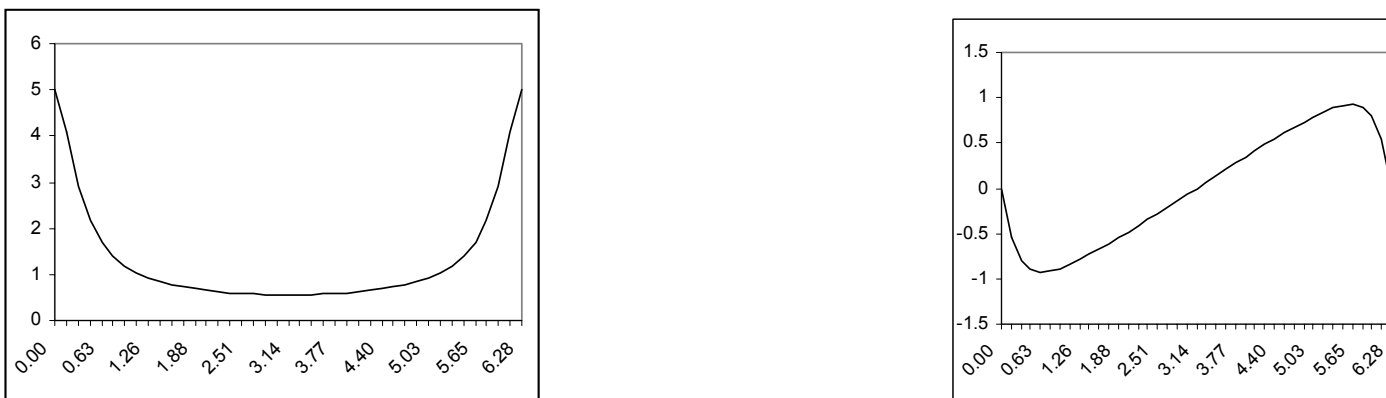


Figura 1.26. Amplitude e fase do decaimento exponencial acima.

d) $x(n) = |a|^n, \quad |a| < 1$

Seja: $x_1(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$; $x_2(n) = \begin{cases} a^{-n} & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$; $|a| < 1$

Então:
$$X(\omega) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$



Figura 1.27. Amplitude e fase do decaimento exponencial simétrico com $a = 0.8$.

e)
$$x(n) = \begin{cases} 1 - |n| / N & |n| \leq N - 1 \\ 0 & |n| > N - 1 \end{cases}$$
 impulso triangular de $2N+1$ amostras.

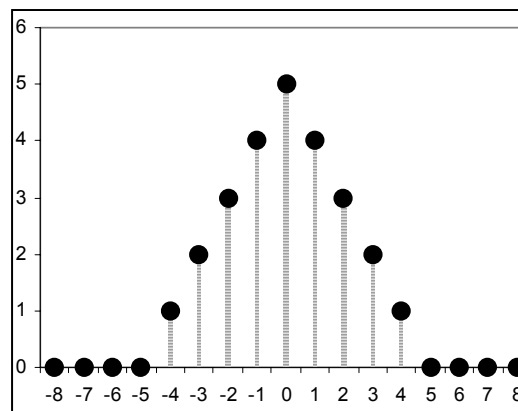


Figura 1.28. Impulso triangular com $2N+1=11$ amostras ($N = 5$).

O impulso triangular corresponde à convolução de 2 impulsos rectangulares de comprimento N :

$$x(n) = q(n) \otimes q(n) \rightarrow X(\omega) = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2$$

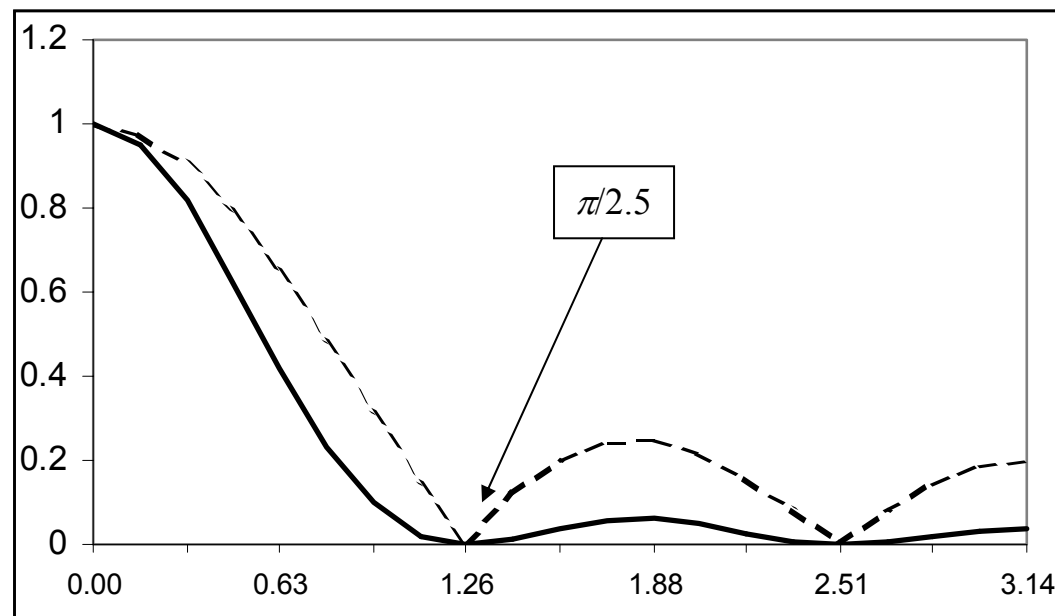


Figura 1.29. Amplitude espectral do impulso triangular (cheio) e rectangular (tracejado).

1.2.6 Transformada Discreta de Fourier

Seja a transformada de Fourier de um sinal discreto (1.6) com frequência normalizada:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Suponhamos que amostramos $X(\omega)$ com espaçamento $\frac{2\pi}{N}$:

$$X(k \frac{2\pi}{N}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi nk / N}, \quad k \in [0, N-1]$$

Subdividindo em intervalos de largura 2π , cada com N termos, temos:

$$X(k \frac{2\pi}{N}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j2\pi nk / N}$$

Mudando n em $n - lN$ e trocando a ordem dos somatórios, obtém-se:

$$X(k \frac{2\pi}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \right] e^{-j2\pi nk / N}$$

Logo, $X(k \frac{2\pi}{N})$ representa, de facto, a série de Fourier do sinal periódico:

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$$

Notar:

- Discreto no tempo $\Leftrightarrow$ periódico nas frequências.
- Discreto nas frequências $\Leftrightarrow$ periódico no tempo.
- Discreto e periódico no tempo $\Leftrightarrow$ discreto e periódico nas frequências.

Expandindo $x_p(n)$ em série de Fourier (1.8), temos:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk / N} \quad \text{com} \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi nk / N}$$

Comparando com resultado anterior, verifica-se que:

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(k \frac{2\pi}{N}\right); \quad x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(k \frac{2\pi}{N}\right) e^{j2\pi nk / N}, \quad n \in [0, N-1]$$

Transformada Discreta de Fourier (mesmas propriedades da transformada de Fourier para sinais discretos):

$$\underbrace{x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}}_{DFT} \Leftrightarrow \underbrace{X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}}_{IDFT}$$

Notar:

- N deverá ser maior que o comprimento de $x(n)$, para que $x_p(n)$ corresponda a translações não sobrepostas de $x(n)$, caso contrário temos aloctonicidade no tempo.
- Aumentando N , através da junção de amostras de valor nulo a $x(n)$, aumentamos a resolução na frequência, $2\pi/N$.
- A avaliação de $X_p(k)$ só necessita de um período de $x_p(n)$.

Exemplo:

Considere o seguinte sinal com período de 1 ms: $x(0) = 0.5$, $x(1) = 1$, $x(2) = 0.5$, $x(n) = 0$ para $n > 2$. Calcule a DFT do sinal para um espaçamento nas frequências de 100 Hz.

Dado que $f_s = 1$ KHz, o espaçamento de 100 Hz corresponde a uma resolução de $N = 1/0.1 = 10$ pontos em 2π . Logo:

$$X(k) = \sum_{n=0}^9 x(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}\right)nk}$$

Portanto:

$$X(k) = x(0) + x(1)e^{-j(\pi/5)k} + x(2)e^{-j(\pi/5)2k} = e^{-j(\pi/5)k} (1 + 0.5 \times 2 \cos(k\pi/5))$$

Neste caso, dado que o sinal é simétrico em torno da amostra central, a transformada é real e simétrica a menos do factor de atraso $e^{-jk\pi/5}$.

A amplitude da DFT é mostrada na figura seguinte.

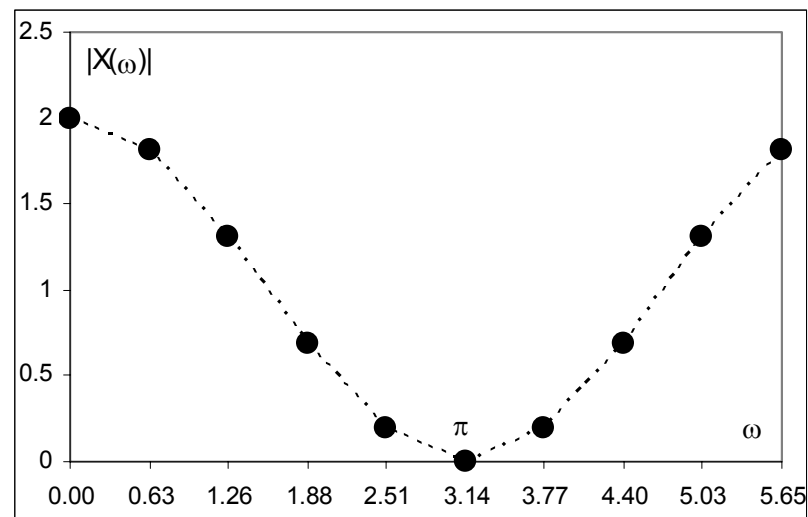


Figura 1.30

Há vários algoritmos de cálculo rápido da DFT/IDFT, denominados **FFT** ("Fast Fourier Transform").

1.2.7 Transformada em z

Definição:

De 1.6 temos a generalização:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad z \in C \quad 1.9$$

com $X(z)$ definida em toda a região do espaço complexo onde a série converge.

Seja a representação polar:

$$X(z)|_{z=re^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}$$

Na região de convergência de $X(z)$, devemos ter $|X(z)| < \infty$. Mas:

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\theta n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

Logo, a sequência $x(n)r^{-n}$ deve ser absolutamente somável.

Note-se, em particular, que se a série converge no círculo unitário, então:

$$X(e^{j\omega}) = X(\omega)$$

Vantagens da generalização:

- Facilita o cálculo de transformadas.
- Permite uma fácil interpretação geométrica da resposta de SLITs.
- Possibilita estudar a resposta para outros regimes de entrada para além de sinusóides, p.ex. $z = ae^{j\omega}$.

Exemplo:

$$x(n) = a^n u(n) \rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

A série geométrica infinita converge para $\frac{1}{1 - az^{-1}}$ sse $|z| > a$.

Indicamos:

$$X(z) \Big|_{|z| > a} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Propriedades:

$$ax_1(n) + bx_2(n) \Leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$$

$$x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k}X(z)$$

$$x(n) \otimes h(n) \Leftrightarrow X(z)H(z)$$

$$r_{xy}(k) = x(k) \otimes y(-k) \Leftrightarrow R_{xy}(z) = X(z)Y(z^{-1})$$

$$x(n)y(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint X(\lambda)Y\left(\frac{z}{\lambda}\right)\lambda^{-1} d\lambda$$

$$nx(n) \Leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$a^n x(n) \Leftrightarrow X(a^{-1}z)$$

$$x(-n) \Leftrightarrow X(z^{-1})$$

$$x^*(n) \Leftrightarrow X^*(z^*)$$

$$x(n) \text{ causal} \Rightarrow x(0) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} X(z)$$

$$x(n) \text{ causal} \Rightarrow x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^n x(i) \Leftrightarrow Y(z) = \frac{z}{z-1} X(z), |z| > \max\{1, \text{raio de conv. } X(z)\}$$

$$x_p(n) \text{ periódica}, x_p(n) = x_p(n+N) \Rightarrow X_p(z) = \frac{z^N}{z^N - 1} X(z), |z| > 1$$

As regiões de convergência deverão ser indicadas. P. ex., para o escalamento temos:

$$X(z)|_{(p,q)} \Rightarrow X(a^{-1}z)|_{(|a|p, |a|q)}$$

Linearidade

Atraso no tempo

Convolução

Correlação

Multiplicação

Diferenciação

Escalamento

Reflexão

Conjugação

Valor inicial

Valor final

Algumas transformadas úteis:

$x(n)$	$X(z)$	Região de Convergência
$\delta(n)$	1	Todo o z
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z^{-1} < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z^{-1} < a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z^{-1} < a $
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z^{-1} < a $
$(\cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z^{-1} < 1$
$(\sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z^{-1} < 1$

Notar, p. ex.:

$$a^n u(n), \quad |a| < 1 \Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Transformada Inversa:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz,$$

sendo c um contorno qualquer na região de convergência.

Frequentemente, determina-se a transformada em z recorrendo à expansão em fracções e tendo em conta as propriedades e transformadas conhecidas.

Exemplo:

De $a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$, deduz-se pela regra de diferenciação:

$$na^n u(n) \Leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

Relação da DFT com a transformada em z :

$$X(z) \Big|_{z=e^{jk\frac{2\pi}{N}}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$$

Logo:

$$X_p(k) = X \left(e^{jk\frac{2\pi}{N}} \right)$$

Os coeficientes da DFT são os valores de $X(z)$ avaliados em N pontos igualmente distribuídos no círculo unitário.

Exemplo:

Decaimento exponencial, $x(n) = a^n u(n)$, com $a = 0.5$.

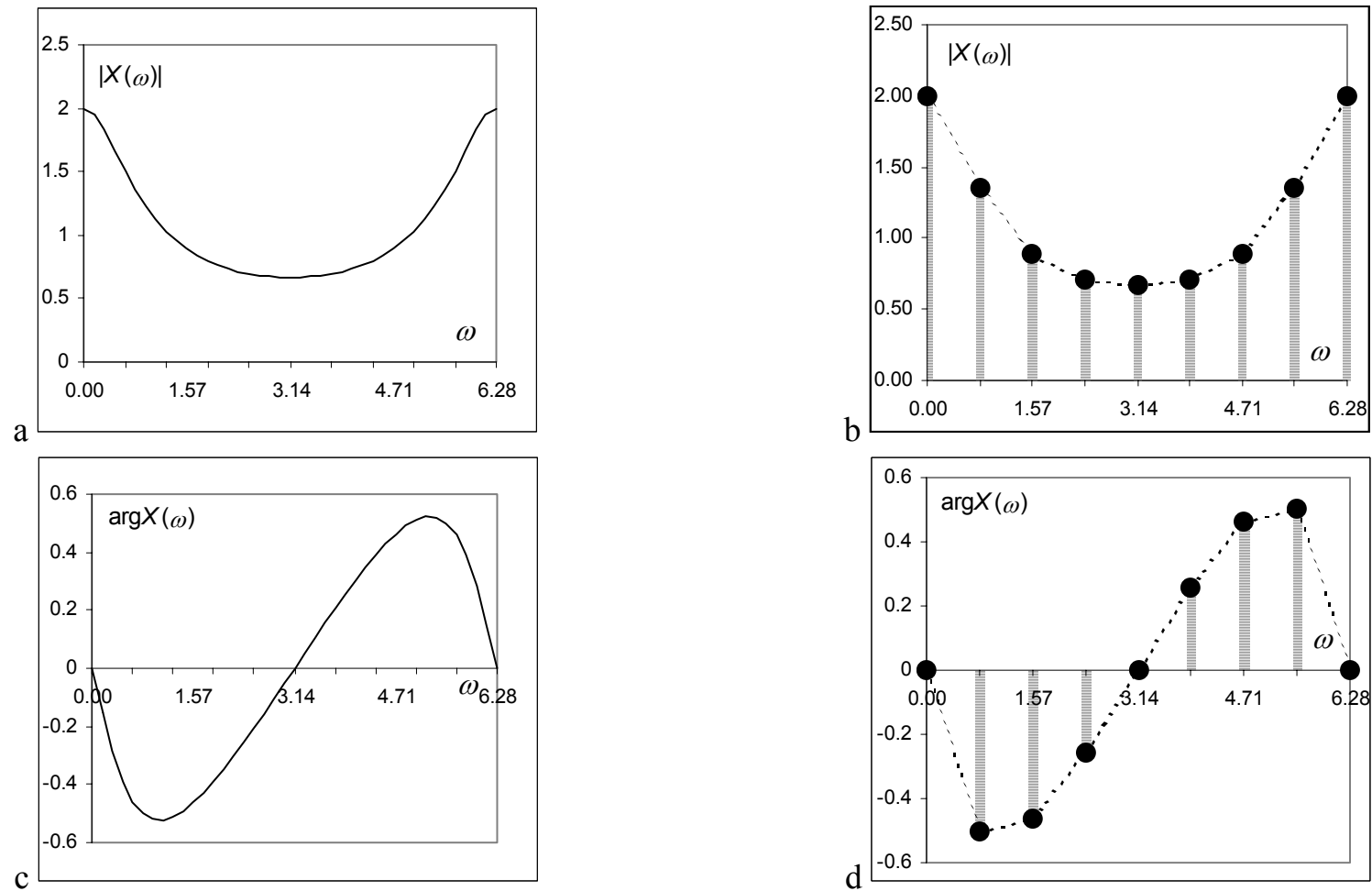


Figura 1.31. Amplitude (acima) e fase (abaixo) do decaimento exponencial com $a=0.5$. À esquerda, usando a transformada de Fourier contínua. À direita, usando a DFT com $N=8$, calculada para os primeiros N valores de $x(n)$.

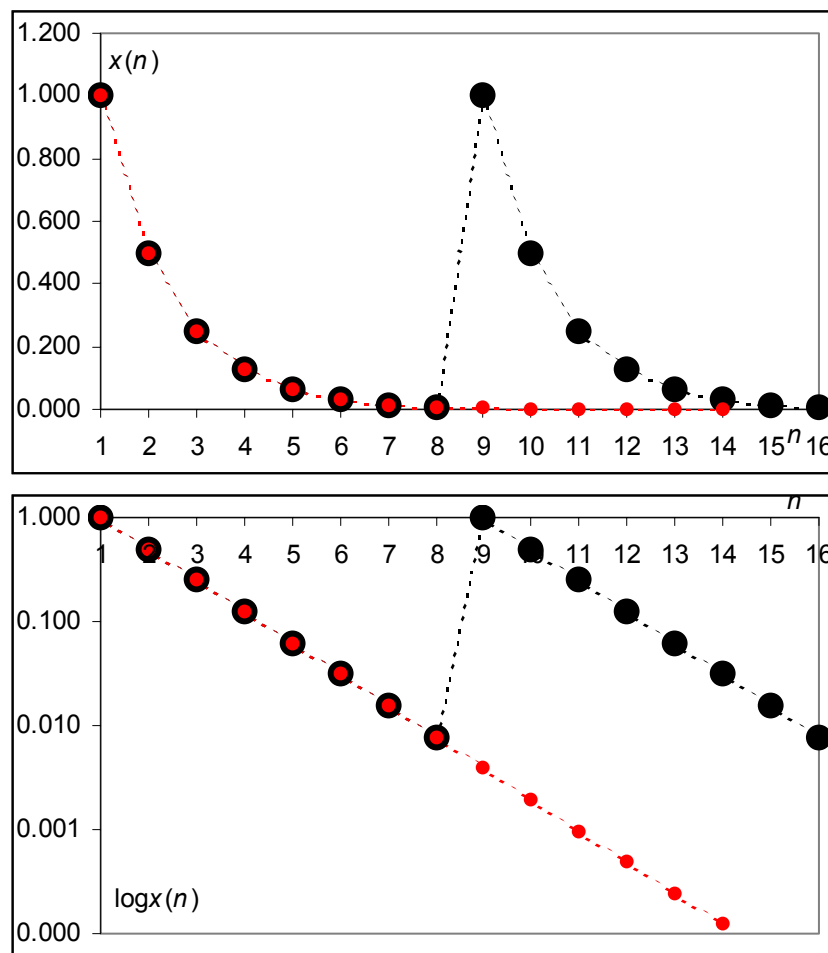


Figura 1.32. Comparação entre a transformada inversa da DFT anterior (preto) e o sinal original (vermelho). Notar a diferença na escala logarítmica, abaixo.

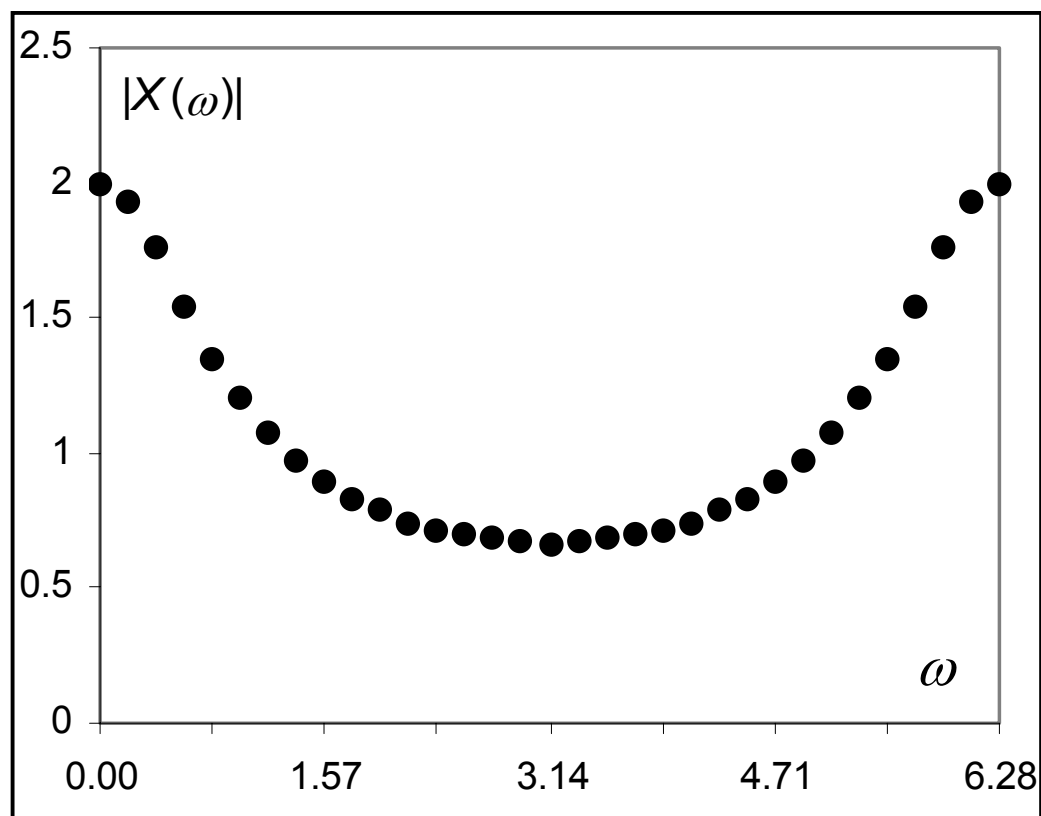


Figura 1.33. Amplitude da DFT dos 8 primeiros pontos do decaimento exponencial, usando $N = 32$. Notar a melhor resolução nas frequências (comparar com a Figura 1.30a).

1.3 Processamento de Sinal com SLITs

1.3.1 Resposta

Dado um SLIT (1.1):

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) = \sum_{j=0}^{M-1} b_j y(n-j) \quad \text{ou} \quad y(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_i}{b_0} x(n-i)}_{\text{parte não recursiva}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{M-1} \frac{b_j}{b_0} y(n-j)}_{\text{parte recursiva}}$$

Normalmente considera-se b_0 unitário:

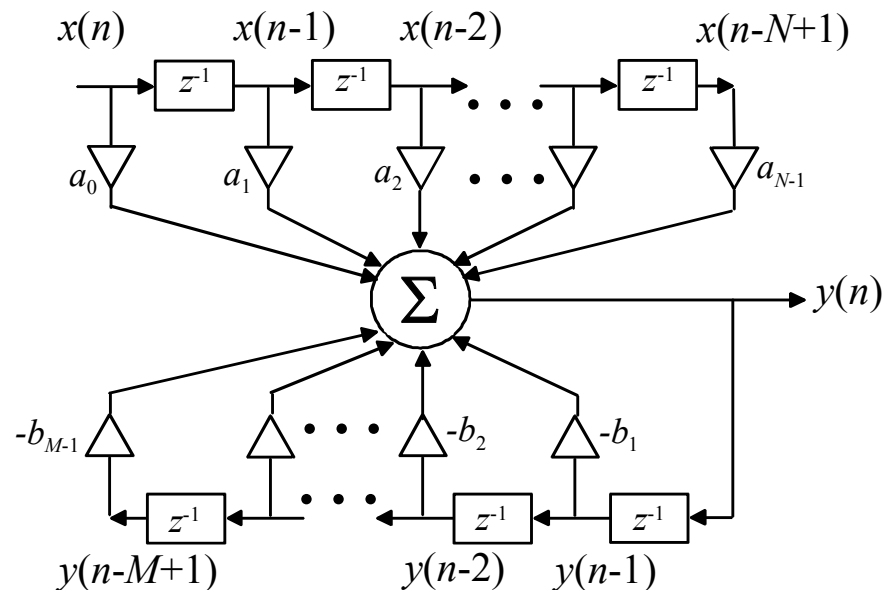


Figura 1.34. Síntese canónica de um SLIT (supõe-se b_0 unitário).

Temos:

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i X(z^{-i}) = Y(z) + \sum_{j=1}^{M-1} b_j Y(z^{-j})$$

ou

$$X(z) \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i} = Y(z) \left(1 + \sum_{j=1}^{M-1} b_j z^{-j} \right)$$

Logo, a resposta do sistema no domínio z , é:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} b_j z^{-j}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- Zeros do numerador: *zeros* da resposta em frequência.
- Zeros do denominador: *polos* da resposta em frequência.
- Polinómios com coeficientes reais: zeros e polos são reais ou complexos conjugados.

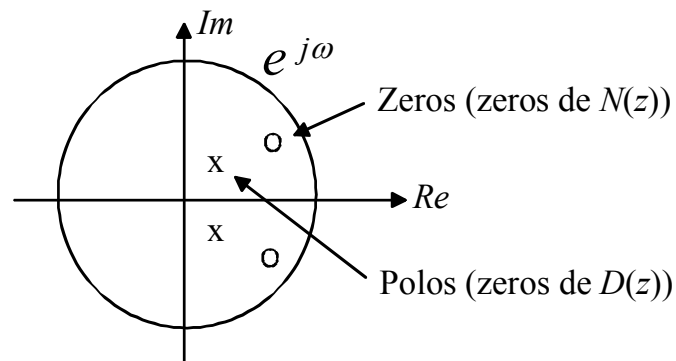


Figura 1.35. Função de transferência no domínio z com zeros e polos complexos conjugados.

Dado que com coeficientes reais os polos e zeros ou são reais ou complexos conjugados, basta fazer a representação no semi-círculo unitário (superior).

Expressão de $H(z)$, em pólos e zeros:

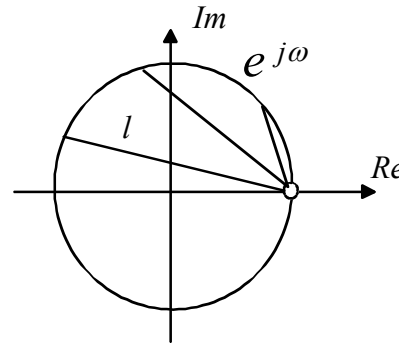
$$H(z) = a_0 \frac{\prod_{i=1}^{N-1} (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^{M-1} (1 - z_j z^{-1})}$$

Exemplos:

a) (Ver 'Exemplo a' em 1.2.5)

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$H(z) = 1 - z^{-1} \rightarrow \text{zero em } 1.$$



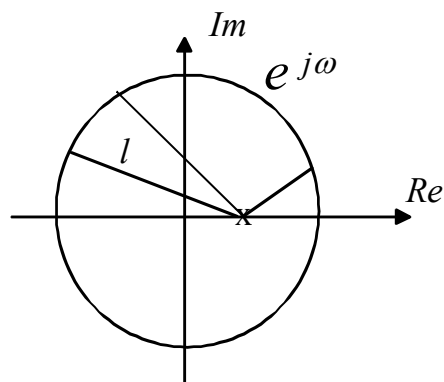
A característica de amplitude do sistema é dada pelo comprimento l da corda que une o ponto do círculo unitário ao zero:

$$|H(\omega)| = l = \sqrt{(1 - \cos \omega)^2 + (\sin \omega)^2}$$

b) (Ver 'Exemplo c' em 1.2.5)

$$h(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \rightarrow \text{polo em } 1/a$$



A característica de amplitude do sistema é dada pelo inverso do comprimento l da corda que une o ponto do círculo unitário ao polo:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2}}$$

Sistema só com zeros:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \dots + a_{N-1} x(n-N+1)$$

Sistema de Média Movente (MA)

- Resposta impulsional de comprimento finito, N .
- Fase linear

Sistema só com pólos:

$$y(n) = x(n) + \sum_{j=1}^{M-1} b_j y(n-j) = x(n) + b_1 y(n-1) + \dots + b_{M-1} y(n-M+1)$$

Sistema Auto-Regressivo (AR)

- Resposta impulsional de comprimento, frequentemente, infinito.
- Fase, frequentemente, não-linear.

Sistema com pólos e zeros: ARMA.

1.3.2 Estabilidade de SLITs

Para um sistema de entrada limitada gerar uma saída também limitada, a resposta impulsional $h(n)$ deve obedecer à condição necessária e suficiente de estabilidade:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Mas:

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| |z^{-n}|$$

No círculo unitário, temos:

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$$

Logo o sistema é estável se a região de convergência contiver o círculo unitário. O inverso é também verdadeiro.

Um SLIT causal tem a sua região de convergência em z^{-1} o interior do círculo unitário (ver $u(n)$), logo:

Um SLIT causal é estável sse todos os seus pólos estão dentro do círculo unitário.

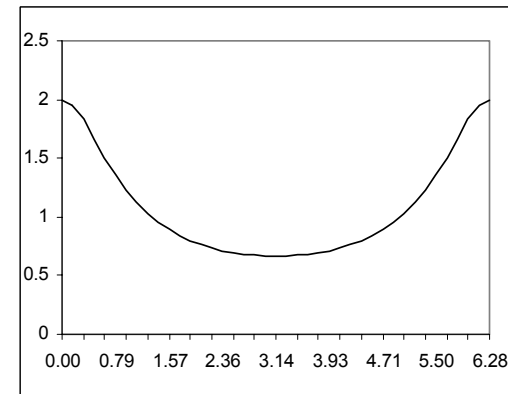
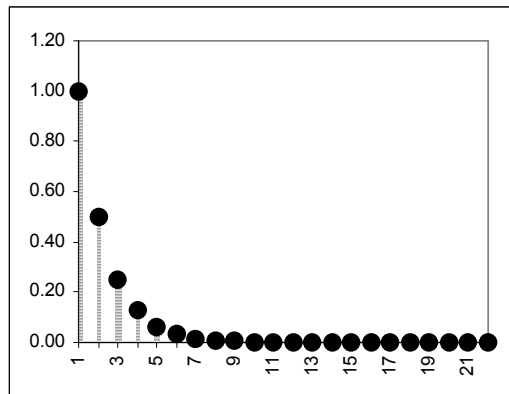
Exemplos:

a)
$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

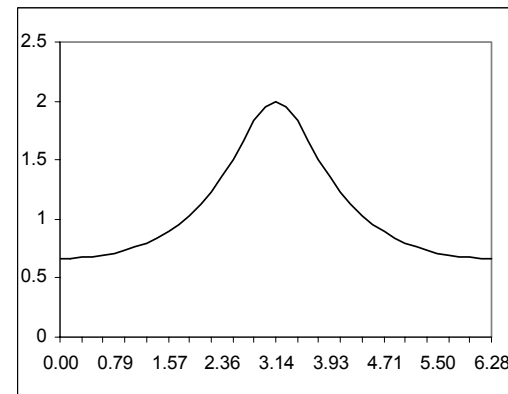
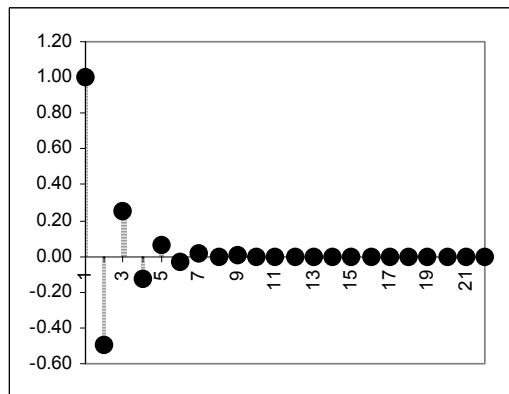
a

 $h(n)$
 $|H(\omega)|$

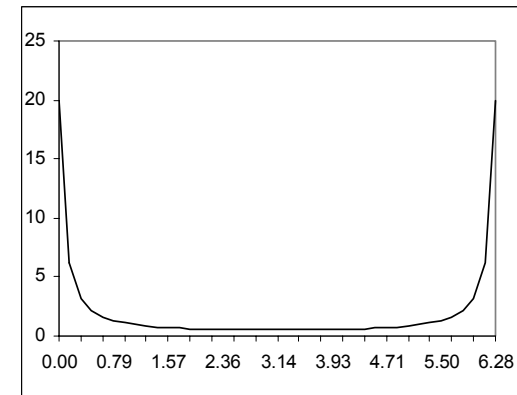
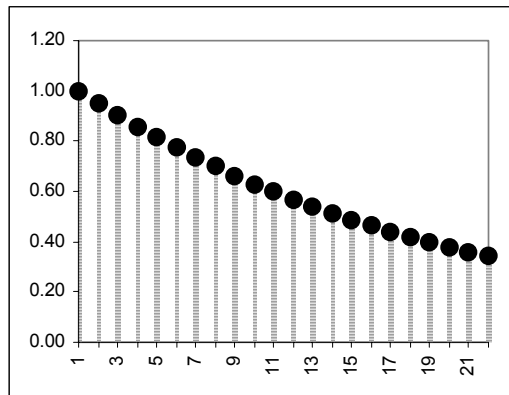
0.5



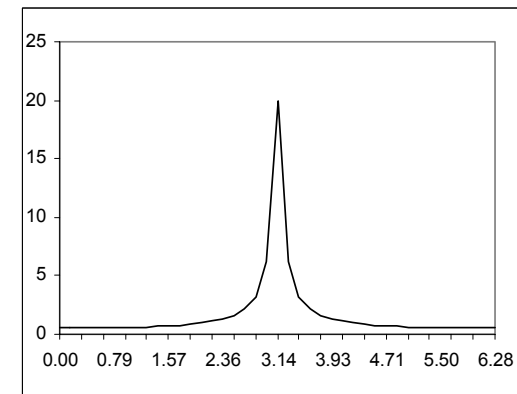
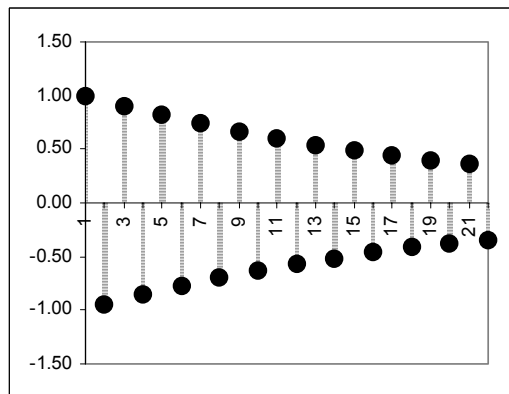
-0.5



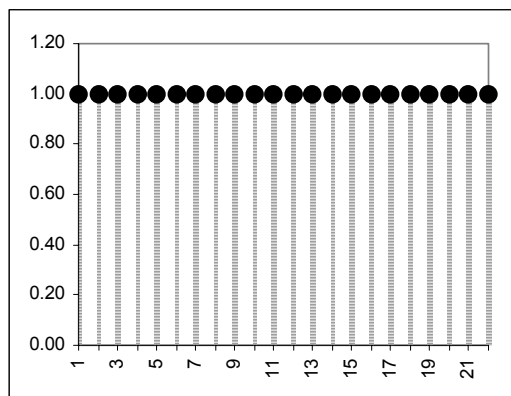
0.95



-0.95



1



-1

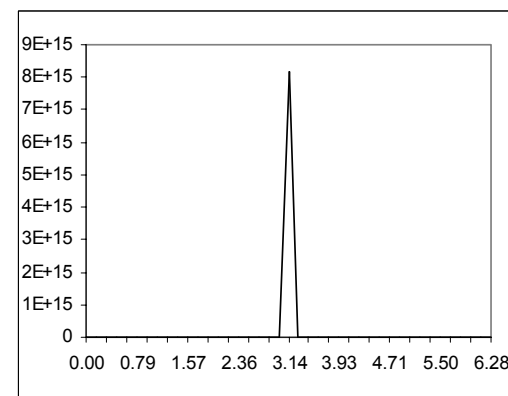
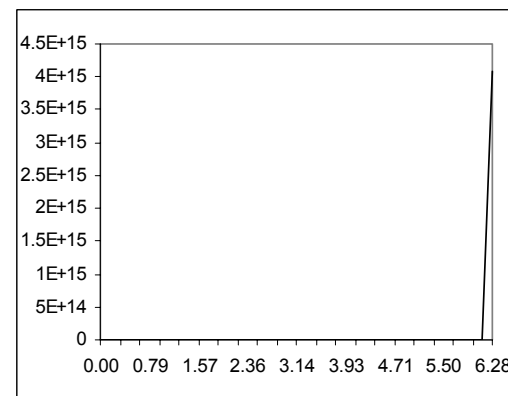
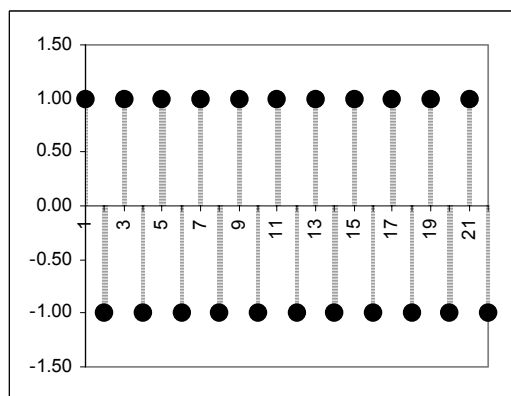


Figura 1.36. Resposta impulsional e amplitude espectral do decaimento exponencial causal para vários valores de a .

b)

$$H(z) = \frac{1}{1 + az^{-1} + bz^{-2}}$$

Sejam $z_1 = re^{j\omega_0}$, $z_1^* = re^{-j\omega_0}$ os pólos conjugados de $H(z)$. Temos:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})} = \frac{1}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

A resposta impulsional pode, então, ser iterativamente calculada, como:

$$h(n) = \delta(n) - ah(n-1) - bh(n-2),$$

com $\begin{cases} a = 2r \cos \omega_0 \\ b = r^2 \end{cases}$

Por outro lado, decompondo em fracções, temos:

$$H(z) = \frac{A}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{B}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}},$$

$$\text{com } \begin{cases} A + B = 1 \\ -rz^{-1}(Ae^{-j\omega_0} + Be^{j\omega_0}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{e^{j\omega_0}}{2j \sin \omega_0} \\ B = -\frac{e^{-j\omega_0}}{2j \sin \omega_0} \end{cases}$$

Portanto:

$$h(n) = (re^{j\omega_0})^n \frac{e^{j\omega_0}}{2j \sin \omega_0} - (re^{-j\omega_0})^n \frac{e^{-j\omega_0}}{2j \sin \omega_0} = r^n \frac{\sin[(n+1)\omega_0]}{\sin \omega_0}$$

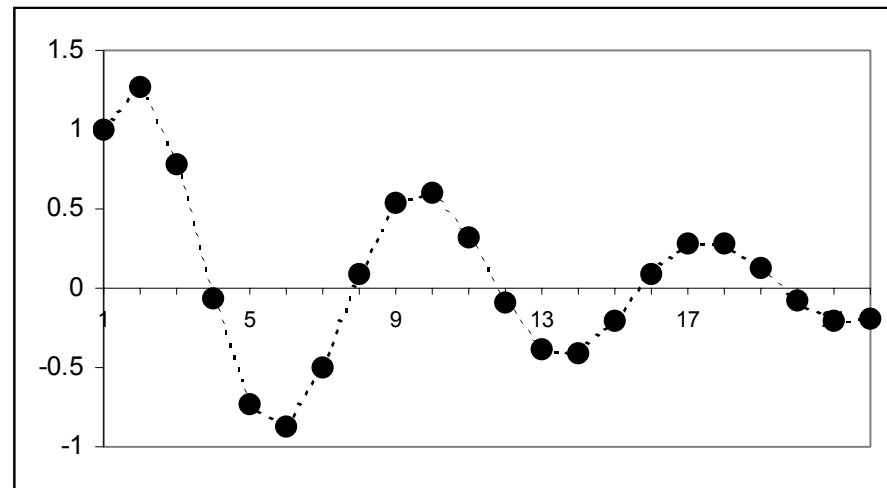


Figura 1.37. Resposta impulsional do sistema de ressonância digital para $r = 0.9123$ e $\omega_0 = 0.8$ ($a = -1.27$; $b = 0.8323$).

É possível mostrar que:

(Exemplo)

- Frequência de ressonância: $\omega_r = \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2}{2r} \cos \omega_0\right)$ (0.127)
- Largura de banda (3 dB): $\Delta\omega \approx 2(1-r)$ (0.175)
- Ganho para ω_r : $(1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos(2\omega_0)}$ (8.29)

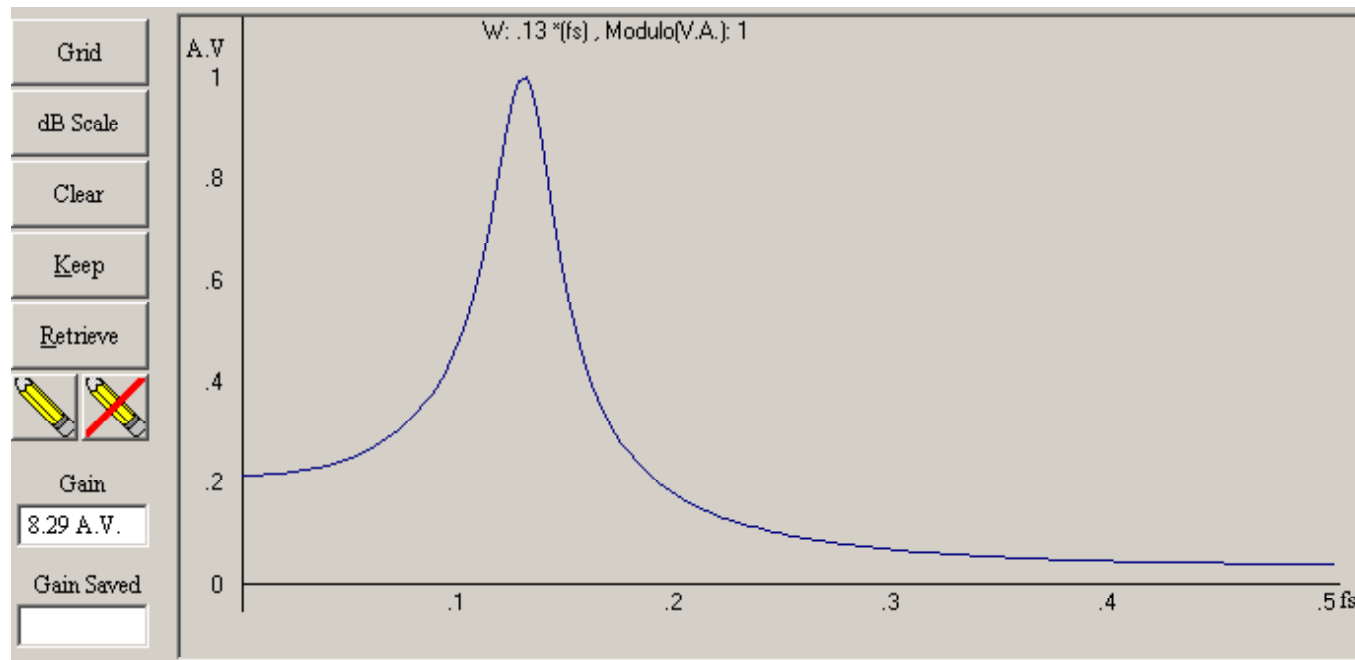


Figura 1.38. Resposta em amplitude para o exemplo anterior.

1.4 Energia, Potência, Correlação e Autocorrelação

1 - Vimos que a energia de um sinal discreto é dada por:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Rescrevendo:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) e^{-j\omega n} d\omega \right]$$

Trocando a ordem de integração e soma, obtém-se:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right] d\omega \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{relação de Parseval})}$$

A quantidade $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$ é chamada *densidade espectral de energia* de $x(n)$.

Para **sinais reais**, $X^*(\omega) = X(-\omega)$, logo: $|X(-\omega)| = |X(\omega)| \Rightarrow S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$

i.e., **a densidade espectral de energia é uma função par**, pelo que basta estudá-la no intervalo $[0, \pi]$.

2 - *Potência média* de um sinal numa janela de $-N$ a N :

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N$$

sendo E_N a energia numa janela de $-N$ a N .

- Sinal de energia: sinal com energia finita
- Sinal de potência: sinal com potência finita

3 - *Correlação cruzada* de dois sinais discretos:

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{sinais de energia finita})$$

Facilmente se conclui que:

$$\begin{aligned} r_{xy}(l) &= r_{yx}(-l) && \text{trocando } x \text{ com } y \text{ obtém-se a mesma correlação se reflectirmos em torno de } l = 0. \\ r_{yx}(l) &= y(l) \otimes x(-l) && \text{relação com a convolução} \end{aligned}$$

A figura seguinte ilustra graficamente a operação de correlação, usando os sinais da Figura 1.6. Notar que não existe a reflexão da resposta impulsional como na convolução. O comprimento da correlação é também $N + M - 1$ (como na Figura 1.6).

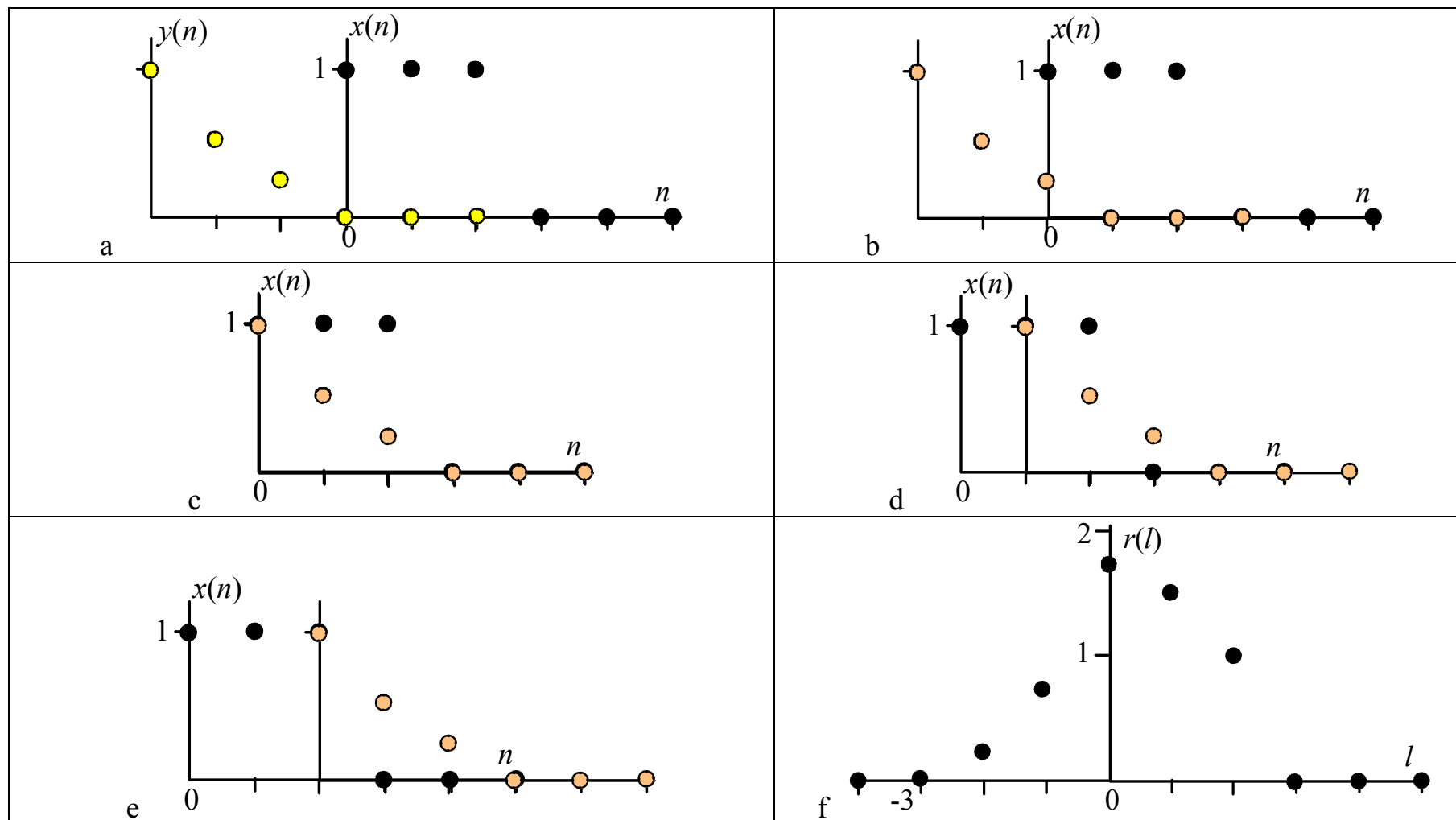


Figura 1.39. Fases da correlação com sinal $y(n)$ avançado (a: $r(-3)$ e usa $y(n+3)$; b: $r(-2)$ e usa $y(n+2)$), $y(n)$ alinhado temporalmente com $x(n)$ (c) e $y(n)$ atrasado (d: $r(1)$; e: $r(2)$), e saída (f) de comprimento $3 + 3 - 1$.

4 – Autocorrelação (correlação de um sinal consigo próprio):

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

As versões limitadas no tempo dos sinais em $[0, N-1]$ são:

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)y(n-l)$$

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)x(n-l)$$

$$\text{com } \begin{cases} i = l, & k = 0 & \text{para } l \geq 0 \\ i = 0, & k = l & \text{para } l < 0 \end{cases}$$

Propriedades:

1 - De $r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$ resulta $r_{xx}(l) = r_{xx}(-l)$, i.e. a autocorrelação é sempre uma função par.

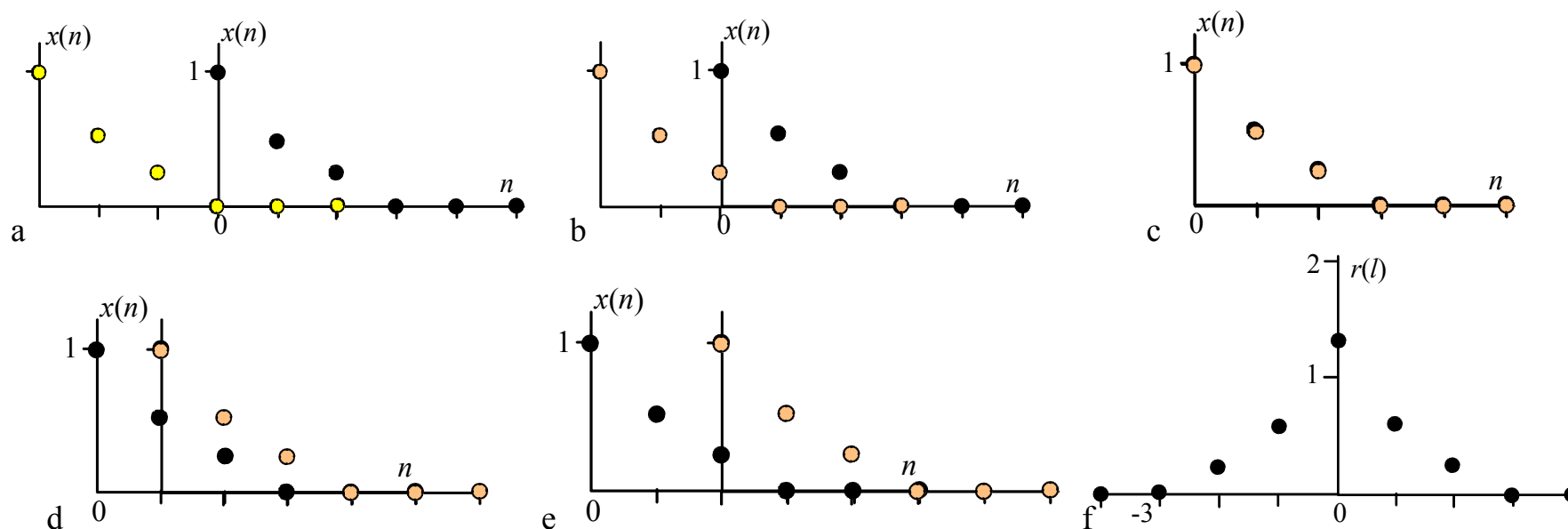


Figura 1.40. Sucessivas fases da autocorrelação de um sinal assimétrico. A autocorrelação, f, é sempre simétrica.

2 - Seja a combinação linear de dois sinais de energia:

$$ax(n) + by(n-l)$$

Então $a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2ab r_{xy}(l) \geq 0$

Donde:

$$|r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} \quad \text{e} \quad |r_{xx}(l)| \leq r_{xx}(0) = E_x$$

3 - O escalamento não modifica a forma da correlação, apenas a amplitude absoluta, logo é habitual normalizar:

$$\rho_{xy} = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}} \quad \text{e} \quad \rho_{xx} = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)}$$

4 - $r_{xy}(l) \leftrightarrow S_{xy}(\omega) = X(\omega)Y(-\omega)$, *espectro de densidade de energia cruzada dos sinais.*

5 - Teorema de Wiener-Khintchine. Seja $x(n)$ um sinal real; então:

$$r_{xx}(l) \leftrightarrow S_{xx}(\omega)$$

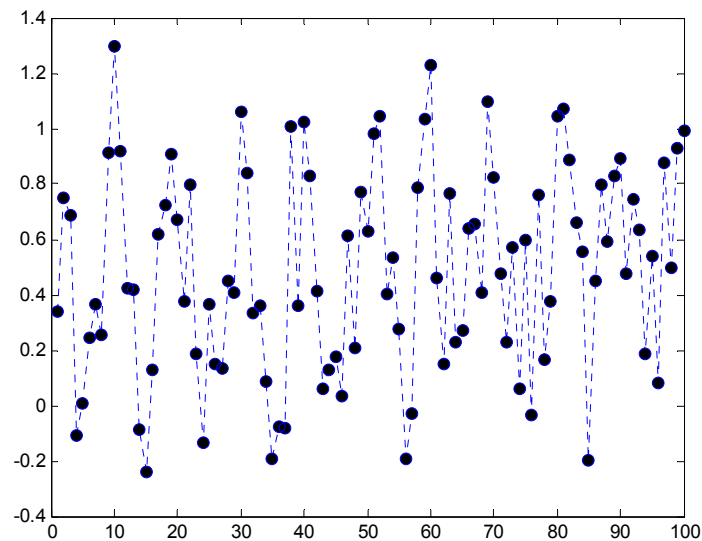
6 - Seja o sinal: $y(n) = x(n) + w(n)$,

onde $x(n)$ é um sinal periódico de período N e $w(n)$ um sinal aleatório.

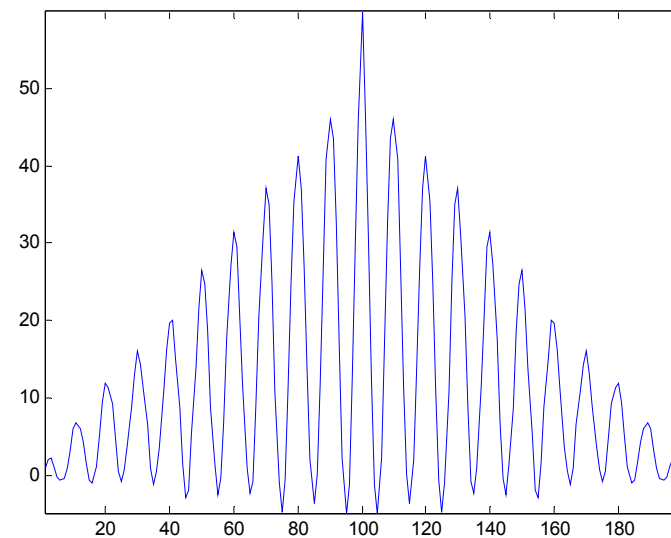
Temos:

$$r_{yy}(l) = r_{xx}(l) + r_{xw}(l) + r_{wx}(l) + r_{ww}(l)$$

$r_{xx}(l)$ exibe picos em múltiplos de N ; $r_{xw}(l)$ e $r_{wx}(l)$ terão pequena contribuição dado a não-correlação entre $x(n)$ e $w(n)$; finalmente $r_{ww}(l)$ terá um pico em 0 e decaimento rápido. Portanto, $r_{yy}(l)$ revelará a periodicidade de $x(n)$.



a



b

Figura 1.41. a) Coseno de amplitude 0.8 e período $N=10$ com ruído uniforme em $[-1, 1]$; b) Autocorrelação do sinal anterior; a periodicidade é claramente visível.

Correlação e autocorrelação em SLITs

De:

$$y(n) = h(n) \otimes x(n),$$

deduz-se:

$$r_{yx}(l) = y(l) \otimes x(-l) = h(l) \otimes [x(l) \otimes x(-l)].$$

Logo:

$$r_{yx}(l) = h(l) \otimes r_{xx}(l).$$

Portanto, a correlação cruzada pode ser vista como a resposta do sistema à autocorrelação.

Também se deduz:

$$r_{yy}(l) = y(l) \otimes y(-l) = [h(l) \otimes x(l)][h(-l) \otimes x(-l)] = r_{hh}(l) \otimes r_{xx}(l)$$

$r_{hh}(l)$ existe se o SLIT é estável e então, se a entrada é de energia, a saída também o é, e identicamente se é de potência.

Também:

$$r_{yy}(0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{hh}(l) r_{xx}(l),$$

o que permite obter a energia ou potência de saída a partir das autocorrelações.

Nas transformadas temos:

$$S_{yx}(z) = H(z)S_{xx}(z) \quad \text{e} \quad S_{yy}(z) = H(z)H(z^{-1})S_{xx}(z)$$

ou, equivalentemente:

$$S_{yx}(\omega) = H(\omega)S_{xx}(\omega) \quad \text{e} \quad S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)$$

A energia total do sinal à saída é:

$$E_y = r_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) d\omega$$

Se $x(n)$ tem um espectro constante (horizontal), E_x , então:

$$S_{yx}(\omega) = H(\omega)E_x \quad \Rightarrow \quad H(\omega) = \frac{1}{E_x} S_{yx}(\omega)$$

ou, equivalentemente,

$$h(n) = \frac{1}{E_x} r_{yx}(n)$$

Este é um método que pode ser usado para determinar a resposta impulsional de um sistema desconhecido.

1.5 Bibliografia

Kuc R (1988) Introduction to Digital Signal Processing. Mc Graw-Hill, Inc.

Lindner DK (1999) Introduction to Signals and Systems. Mc Graw-Hill, Inc.

Lyons RG (1997) Understanding Digital Signal Processing. Addison Wesley Longman, Inc.

Oppenheim AV, Schafer RW, Buck JR (1999) Discrete-Time Signal Processing. Prentice-Hall Inc.

Papoulis A (1984) Signal Analysis. McGraw-Hill, Inc.

Proakis JG, Manolakis DG (1996) Digital Signal Processing. Principles, Algorithms and Applications. Prentice Hall Int., Inc.

Rabiner LR, Gold B (1975) Theory and Application of Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Inc.

Schwarz M, Shaw L (1975) Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection and Estimation. McGraw Hill.

Steiglitz K (1974) An Introduction to Discrete Systems. J. Wiley & Sons, Inc.

Tretter SA (1976) Introduction to Discrete Time Signal Processing. J. Wiley & Sons, Inc.