Processamento de Sinal

Conceitos, Métodos e Aplicações

Texto Tutorial da Disciplina:
APSI - LEEC

J.P. Marques de Sá – jmsa@fe.up.pt
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

ÍNDICE

2 Filtros Digitais *5*

2.1 Projecto de Filtros **5**

2.2 Distorção **6**

2.3 Filtros FIR **10**
2.3.1 Introdução 10
2.3.2 Projecto de Filtros FIR pelo Método da Janela 17
2.3.3 Projecto de Filtros FIR Óptimos 21
2.3.4 Aplicações de Filtros FIR 25

2.4 Filtros IIR **32**
2.4.1 Conversão de filtros analógicos para filtros digitais 32
2.4.2 Filtros IIR correspondentes a protótipos analógicos 35
2.4.3 Diferenciadores 41
2.4.4 Aplicações de filtros IIR 44

2.5 Decimação-Interpolação **51**
2.5.1 Decimação 51
2.5.2 Interpolação 53
2.5.3 Filtro interpolador óptimo 58
2.5.4 Aplicações de decimação-interpolação 66

2.6 Filtros FIR Adaptativos **72**
2.6.1 Estrutura e Aprendizagem 72
2.6.2 Aplicações de Filtros FIR Adaptativos 74

2.7 Filtros Não Lineares **83**
2.7.1 Filtro de Mediana 85
2.7.2 Aplicações do filtro de mediana 93
2.7.3 Introdução aos Filtros de Pilha ("Stack Filters") 96
2.7.4 Filtros Morfológicos 101
2.7.5 Aplicações de filtros morfológicos 103

Símbolos

x	variável
x^*	conjugado de x
$x(t)$	sinal contínuo
$x(n)$	sinal discreto
$X(\Omega)$	Transformada de Fourier de sinais contínuos
$X(\omega)$	Transformada de Fourier de sinais contínuos
N	número de amostras
T	período
f	frequência (Hz)
f_l	frequência de corte inferior
f_c	frequência de corte superior
Ω	frequência angular (= $2\pi f$ radianos) para sinais contínuos
ω	frequência angular (= $2\pi f$ radianos) para sinais discretos
$t(n)$	degrau de Heaviside, discreto
$\delta(n)$	impulso de Dirac, discreto
$\mathrm{sinc}(x)$	seno cardinal de x ($\sin(x)/x$)
$\otimes$	operador de convolução
$\rightarrow$	tende para
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	em correspondência com
$\equiv$	definida por, equivalente a

Abreviaturas

PDS	Processamento Digital de Sinal
sse	se e só se
dB	decibel

2 Filtros Digitais

2.1 Projecto de Filtros

Estudo das Distribuições Espectrais do Sinal e do Ruído

↓

Definição de Característica
ou de
Parâmetros de Característica (freq. de corte, ripples, etc.)

↓

Escolha do Tipo de Filtro

↓

Projecto do Filtro

↓

Projecto do Algoritmo de Filtragem

↓

Implementação (hardware/software)

Figura 2.1. Sequência típica de passos num projecto de filtragem digital.

2.2 Distorção

- Distorção de amplitude: ocorre em sistemas não-lineares
- Distorção de fase: ocorre em sistemas não-lineares ou com fase não-linear

De:

$$H(\omega)=Ce^{-j\alpha\omega} \text{ e } Y(\omega)=X(\omega)H(\omega) \text{ resulta } y(n)=Cx(n-\alpha)$$

Logo, quando a fase é linear todas as componentes do sinal sofrem um mesmo atraso e não há distorção de fase.

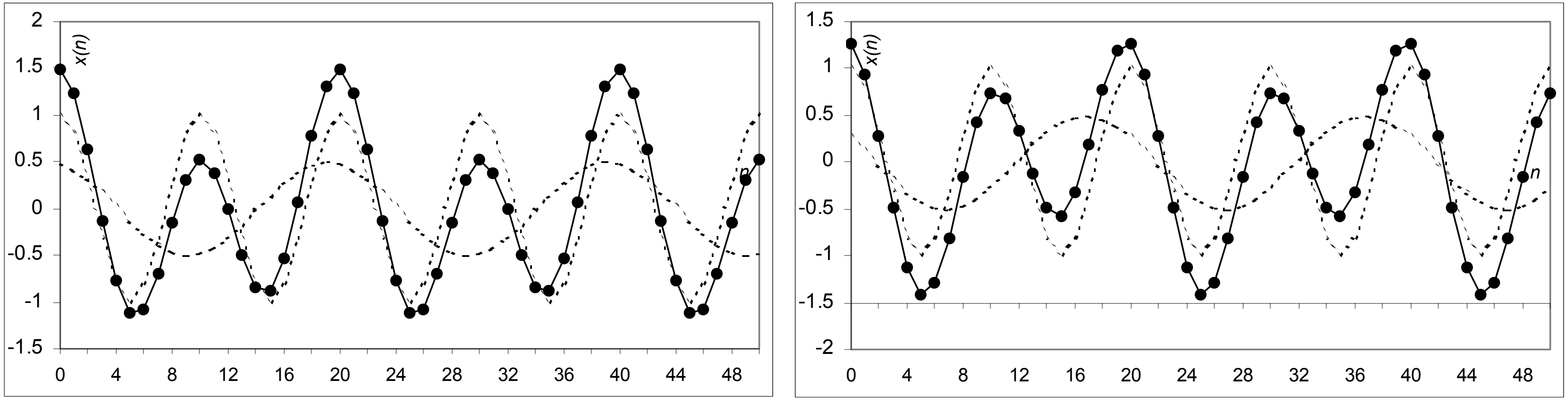


Figura 2.2. Adição das mesmas componentes sinusoidais de um sinal, com fases diferentes.

Seja o sistema: $H(\omega) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$,

Consideremos que o sinal a processar é de muito maior comprimento que a resposta do sistema, tal como na Figura 2.3.

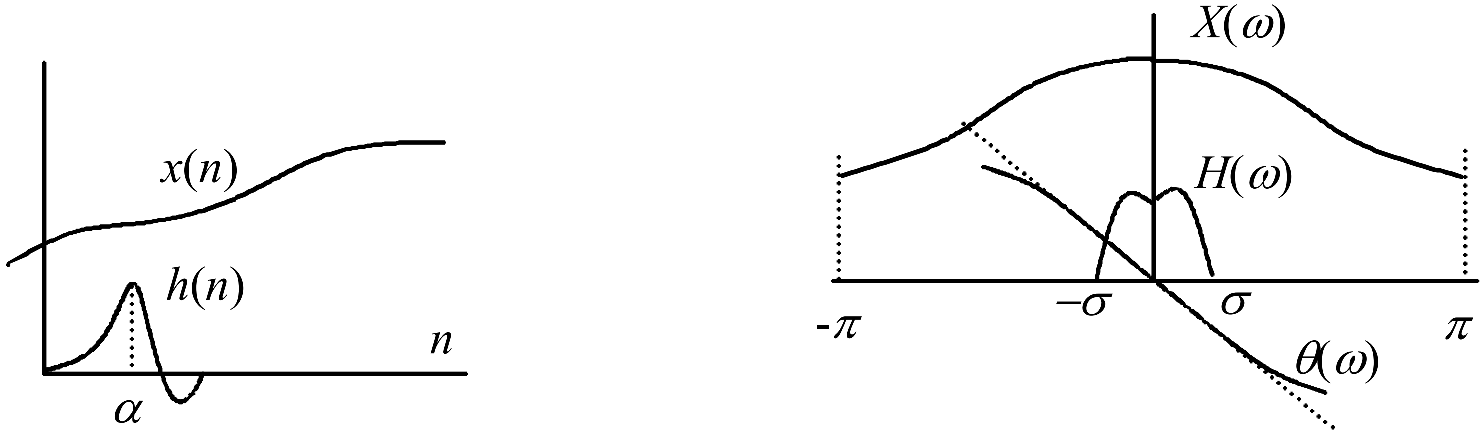


Figura 2.3.

Podemos, então, procurar uma aproximação:

$$H(\omega) = Ae^{-j\alpha\omega} \quad \Rightarrow \quad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \approx Ae^{-j\alpha\omega}X(\omega) \quad \Rightarrow \quad y(n) \approx Ax(n-\alpha)$$

Aproximando $X(\omega)$ por uma parábola no intervalo [-σ, σ]:

$$Y(\omega) \approx \left(A - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-j\alpha\omega}X(\omega) \quad \Rightarrow \quad y(n) \approx Ax(n-\alpha) + \frac{\sigma^2}{2}x''(n-\alpha),$$

vemos que a aproximação é aceitável se $\sigma^2 x''(n) << Ax(n)$.

Consideremos, agora, que o sinal de variação lenta é modulado com uma portadora de frequência ω_0. Se a *envolvente* $x(n)$ da entrada $x(n)\cos(\omega_0 n)$ tem uma variação lenta, a resposta do sistema pode ser aproximada por:

$$y(n) \approx A(\omega_0)\, x(n - n_g)\cos[\omega_0\,(n - n_p)],$$

onde:

$n_g = -\theta'(\omega_0)$ é o *atraso de grupo*

$n_p = -\theta(\omega_0)/\omega_0$ é o *atraso de fase*

Na situação anterior tínhamos apenas atraso de fase: $n_p = -\theta(\omega_0)/\omega_0 = -(-\alpha\omega_0)/\omega_0 = \alpha$.

Vejamos as condições a impor à resposta impulsional finita (N amostras) do sistema. Seja $\theta(\omega)$ a função de fase do sistema:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega.$$

o que assegura um atraso de fase nulo e atraso de grupo constantes (α). Temos:

$$H(\omega) = \pm\left|H(\omega)\right|e^{-j\alpha\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha\omega)}{\cos(\alpha\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)}$$

Há 2 casos a considerar:

$\alpha = 0$: $\quad \Rightarrow \begin{cases} h(0) = c \\ h(n) = 0 & n \neq 0 \end{cases}$ situação com pouco interesse.

$\alpha \neq 0$: $\quad \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)\sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)\cos(\alpha\omega) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[(\alpha - n)\omega] = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = (N-1)/2 \\ h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

i.e., a <u>resposta impulsional é simétrica</u>.

Impondo apenas atraso de grupo constante:

$$H(\omega) = \pm |H(\omega)| e^{j(\beta - \alpha\omega)},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = (N-1)/2; \quad \beta = \pm\pi/2 \\ h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

i.e., a <u>resposta impulsional é anti-simétrica</u>.

A simetria e anti-simetria podem exprimir-se simplesmente: $\quad H(z^{-1}) = \pm z^{N-1} H(z)$

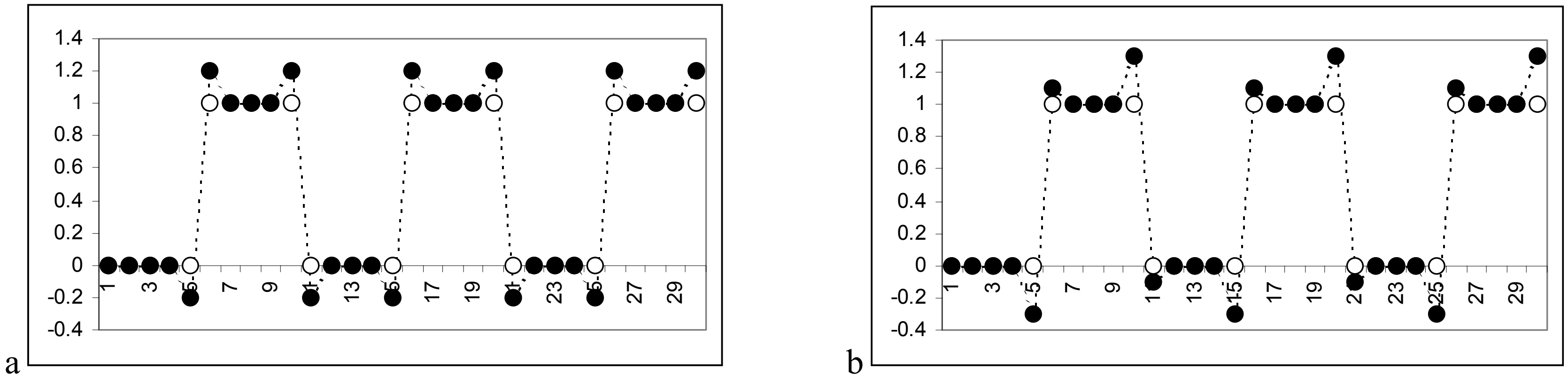


Figura 2.4. Onda quadrada filtrada com [-0.2 1.4 -0.2] (a) e com [-0.1 1.4 -0.3] (b).

2.3 Filtros FIR

2.3.1 Introdução

Filtros de resposta finita (*Finite Impulse Response*) de comprimento N:

$$H(\omega) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h(n)\, e^{j\omega n}$$

Supomos N ímpar. Se for par, as conclusões são as mesmas, a menos de um atraso de "meia amostra".

Resposta simétrica:

$$H(\omega) = h(0) + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} h(n)(e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}) = h(0) + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} 2h(n)\cos(n\omega)$$

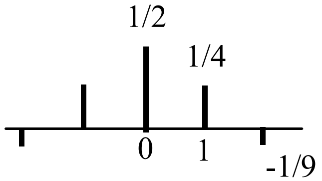
Resposta anti-simétrica:

$$H(\omega) = -2j \sum_{n=1}^{(N-1)/2} h(n)\sin(n\omega)$$

As versões causais têm uma fase linear correspondente a metade do comprimento do filtro: $e^{-j\omega(N-1)/2}$

Exemplos:

a)



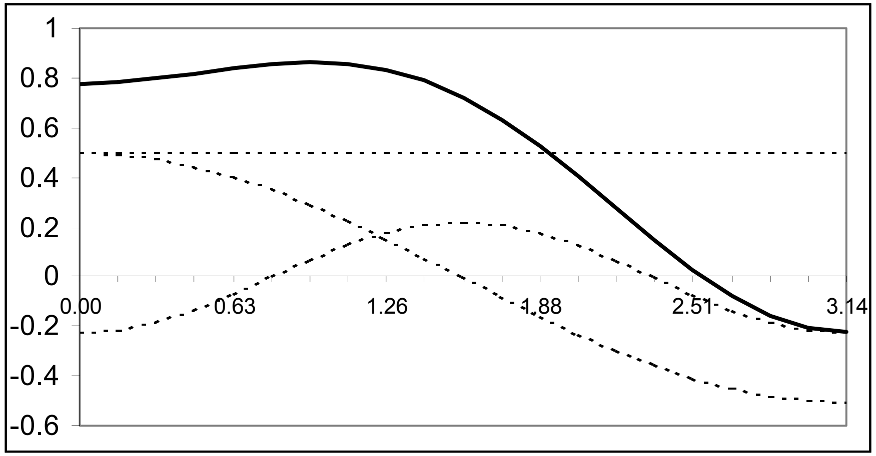


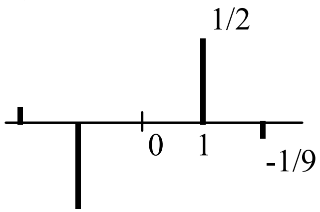
Figura 2.5. Filtro FIR simétrico.

Escrevemos:

$h(n)$ =]-1/9 1/4 1/2]
ou
$h(n)$ = [1/2 1/4 -1/9[

- $H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\omega - \frac{2}{9}\cos(2\omega)$
- $H(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = 0.78$

b)



$h(n) =]\text{-}1/9 \quad 1/2 \quad 0]$

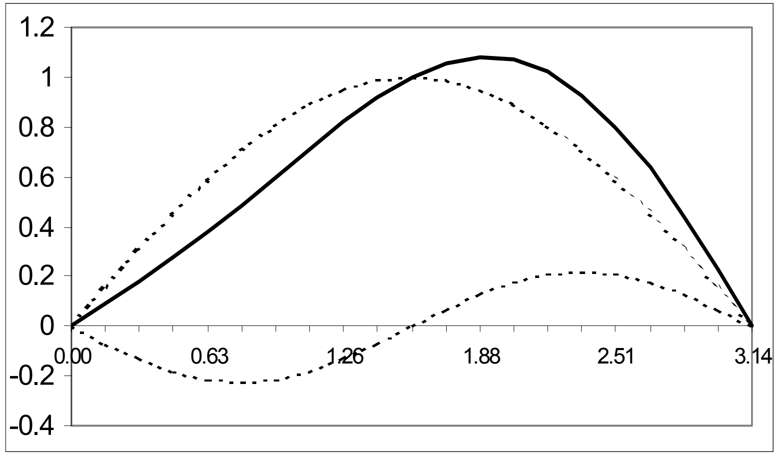
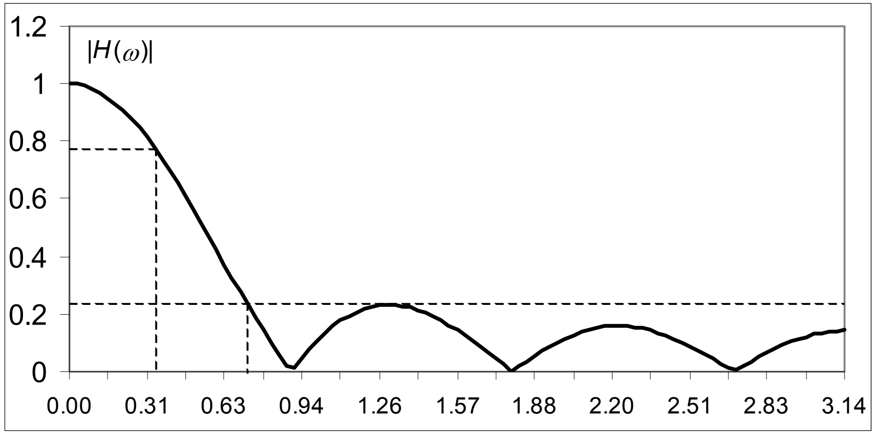


Figura 2.6. Filtro FIR anti-simétrico.

- $H(\omega) = \sin\omega - \frac{2}{9}\sin(2\omega)$
- $H(0) = 0$ (sempre)

Dois filtros simples e úteis:

Filtro de média de N amostras	$h(n) = 1/N,$ $0 \le n \le N-1$	$H(\omega) = \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$
Filtro triangular de $2N$ amostras	$t(n) = h(n) \otimes h(n)$	$T(\omega) = H^2(\omega)$



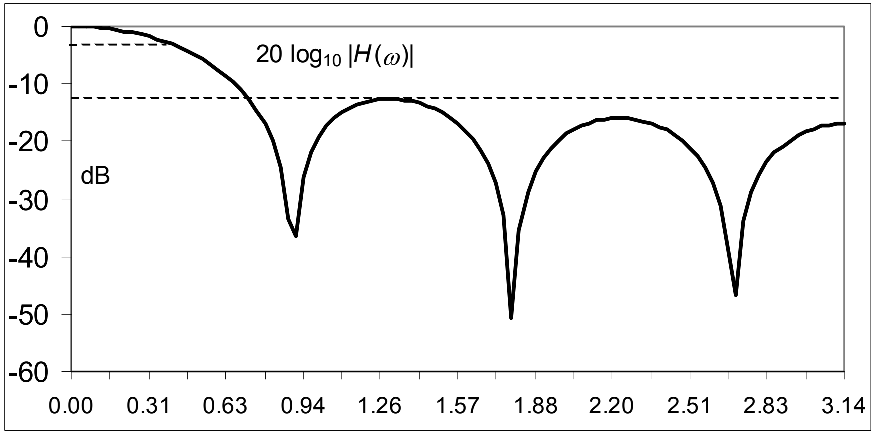


Figura 2.7. Características de amplitude do filtro de média de 7 amostras. Os zeros ocorrem em múltiplos de $2\pi/7$ = 0.9.

Relativamente a uma característica ideal normalizada de um *filtro passa-baixo*, [1, 0], define-se:

- *Ripple*, R: desvio máximo da característica real face à característica ideal. Pode ser na zona de passagem (1), R_p, ou na zona de rejeição (0), R_l. (para o filtro rectangular $R_l \approx [N \sin(3\pi/(2N))]^{-1} = 0.23 \to -13$ dB).

- *Frequência de corte superior*, f_c: maior frequência na zona de passagem com atenuação igual ao ripple ou igual a –3dB (0.708) na sua ausência. (para o filtro rectangular com $N = 7$, $f_c = 0.38$).

- *Frequência de corte inferior*, f_l: menor frequência na zona de rejeição com amplitude igual ao ripple. (para o filtro rectangular com $N = 7$, $f_l = 0.72$)

- Banda de passagem do filtro: $B = [0, f_c]$

- Banda de rejeição do filtro: $[f_l, \pi]$

- Banda de transição: $\Delta B = | f_c, - f_l |$

Dado um filtro *passa-baixo* (LP), de resposta $h(n)$, obtém-se um filtro *passa-alto* (HP) usando $\delta(n) - h(n)$ e, a partir destes, o de *passa-banda* (BP) e o de rejeição de banda (BS), também designado por *filtro tampão*.

Dois Filtros LP projectados com LabSin:

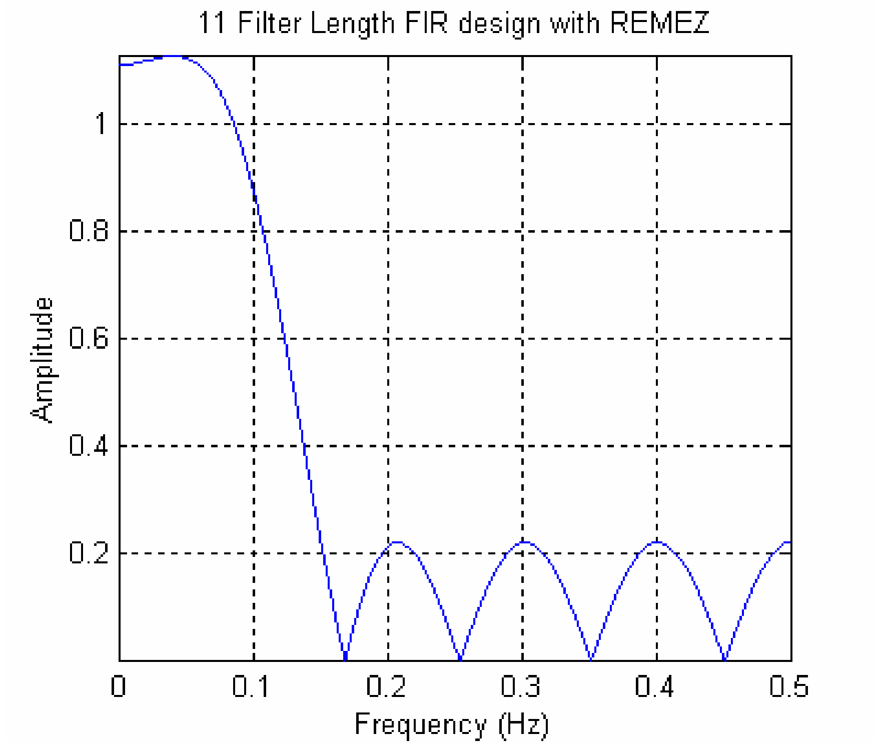
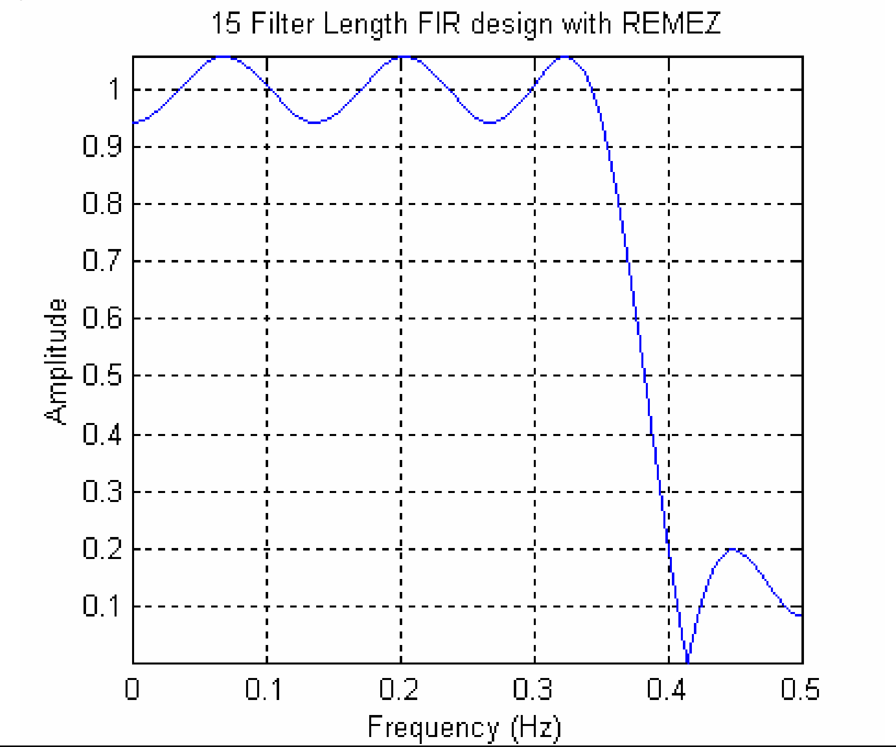
$N = 11$	$N = 15$
	
$h_1(n)$ =]-0.1082 0.2788 0.0915 0.1723 0.2392 0.2650]	$h_2(n)$ =]-0.0490 0.0405 -0.0248 -0.0219 0.0942 -0.1739 0.2364 0.7400]

Figura 2.8. Filtros FIR LP projectados com o algoritmo de Remez.

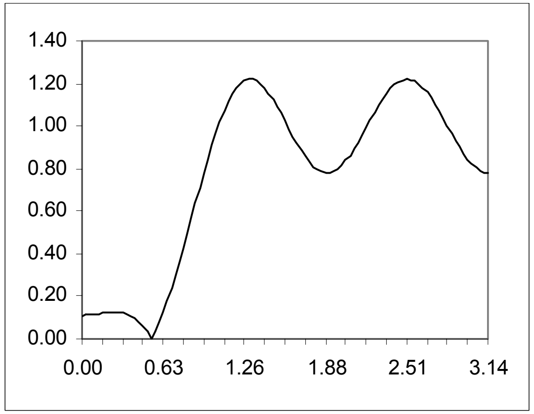
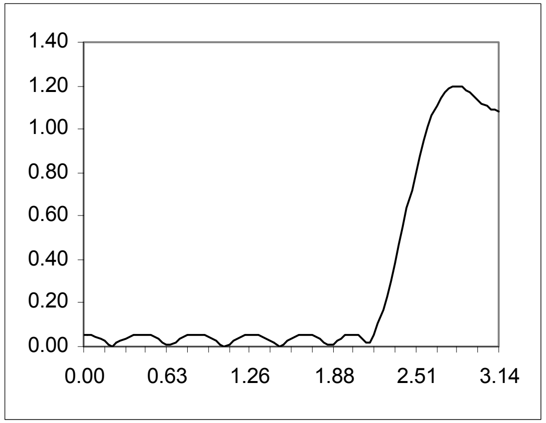
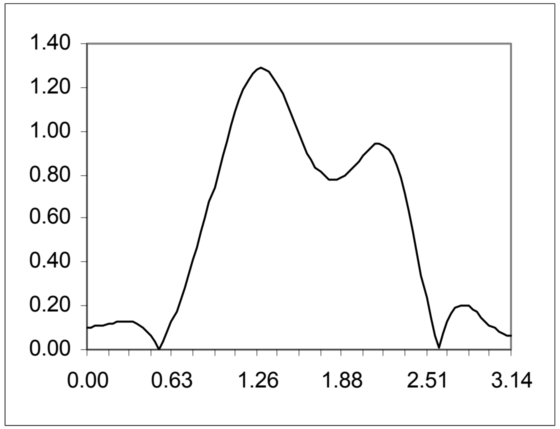
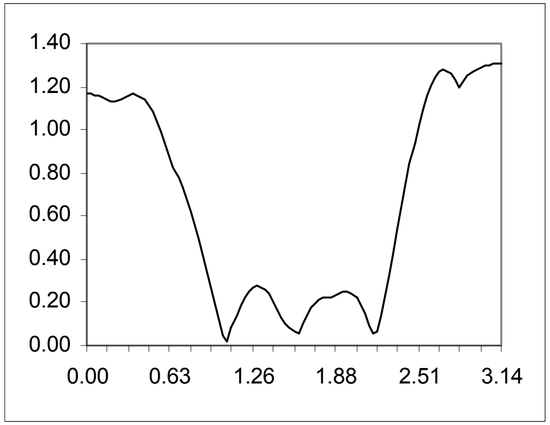
	
$hp_1(n)$=]0.1082 -0.2788 -0.0915 -0.1723 -0.2392 1-0.2650]	$hp_2(n)$=]0.0490 -0.0405 0.0248 0.0219 -0.0942 0.1739 -0.2364 1-0.7400]
	
$BP(\omega) = HP_1(\omega).LP_2(\omega)$	$BS(\omega) = LP_1(\omega) + \mathrm{H}P_2(\omega)$

Figura 2.9. Filtros HP, BP e BS projectados com base nos filtros LP anteriores.

2.3.2 Projecto de Filtros FIR pelo Método da Janela

Vimos já que a característica LP ideal com frequência de corte f_c corresponde a:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}(n\omega_c), \qquad n \in \left]-\infty, \quad \infty\right[$$

Notar que $h(0) = 2f_c$.

A implementação por truncatura deste filtro origina o fenómeno de Gibbs na resposta em frequência:

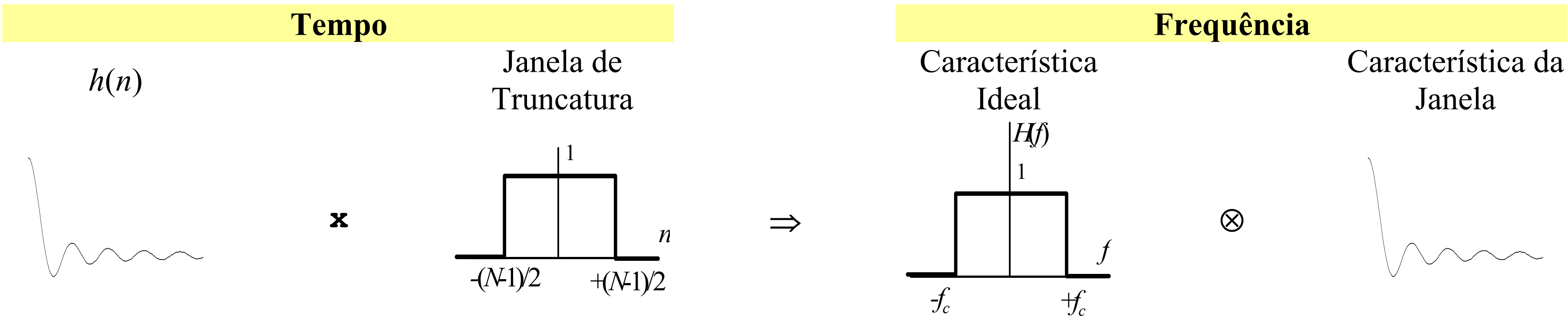


Figura 2.10

Em vez de truncar $h(n)$ com a janela rectangular, usam-se janelas com os seguintes requisitos antagónicos, nas frequências:

- Lobo principal de largura mínima
- Lobos laterais de área negligível

Janela rectangular:

- Menor lobo principal para um certo comprimento
- Maiores lobos laterais entre todas as janelas

Exemplos de janelas usuais ($n \in [0, N-1]$):

Hanning $$0.5 + 0.5\cos(2\pi n/(N-1))$$

Hamming $$0.54 + 0.46\cos(2\pi n/(N-1))$$

Triangular (Fejer) $$1 - \left|2n/(N-1)\right|$$

Lanczos $$\left[\frac{\sin(2\pi n/(N-1))}{2\pi n/(N-1)}\right]^m$$

m é um inteiro > 0 que controla o compromisso entre largura do lobo principal vs. área dos lobos laterais.

Kaiser $$I_0\left(\beta\sqrt{1-\frac{4n^2}{(N-1)^2}})\right)/I_0(\beta)$$

I_0 é a função modificada de Bessel do primeiro tipo e ordem zero; β controla a atenuação na banda de rejeição.

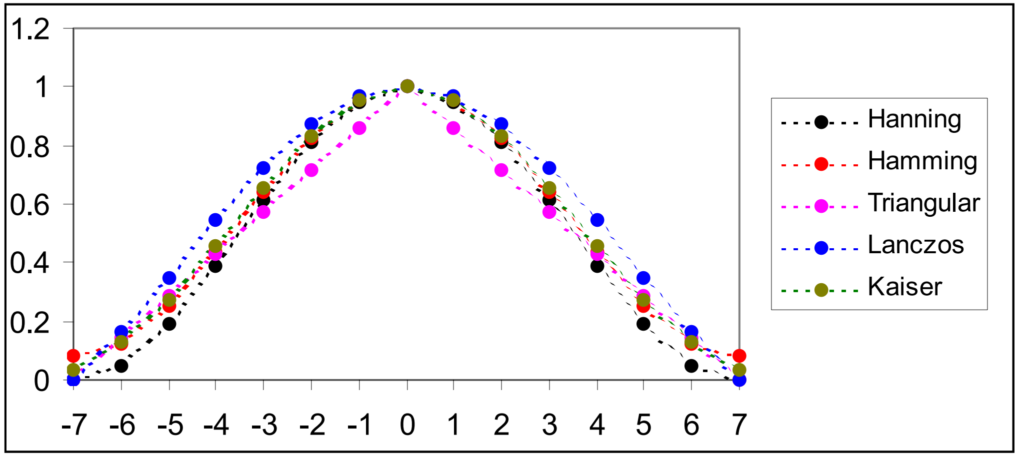
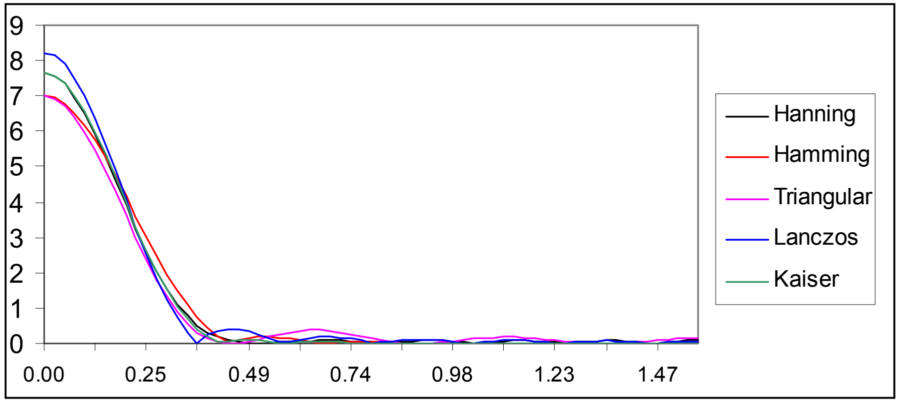


Figura 2.11. Janelas de truncatura. A de Lanczos está calculada com $m = 1$ e a de Kaiser com $\beta = 5$.



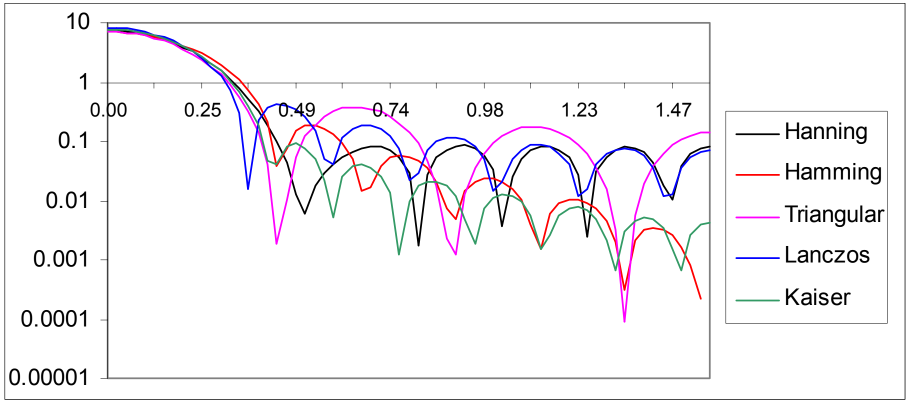
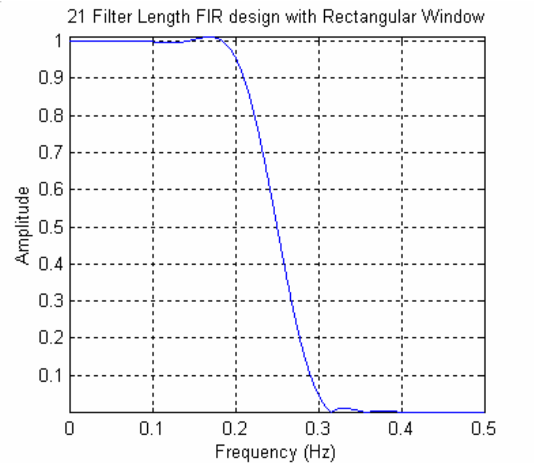


Figura 2.12. Resposta nas frequências das janelas de truncatura, representadas à direita em escala logarítmica ($m = 1$ para Lanczos e $\beta = 5$ para Kaiser).

Exemplo: Filtro passa-baixo com $f_c = 0.25$, $N = 21$:

n	Resposta para Janela Rectangular	Janela de Hamming	Resposta para Janela de Hamming
10	1.94988E-17	0.08	1.55991E-18
9	0.035367765	0.102514003	0.003625691
8	-1.94988E-17	0.167852183	-3.27292E-18
7	-0.045472841	0.269618784	-0.012260332
6	1.94988E-17	0.397852183	7.75766E-18
5	0.063661977	0.54	0.034377468
4	-1.94988E-17	0.682147817	-1.33011E-17
3	-0.106103295	0.810381216	-0.085984118
2	1.94988E-17	0.912147817	1.77858E-17
1	0.318309886	0.977485997	0.311143457
0	0.5	1	0.5



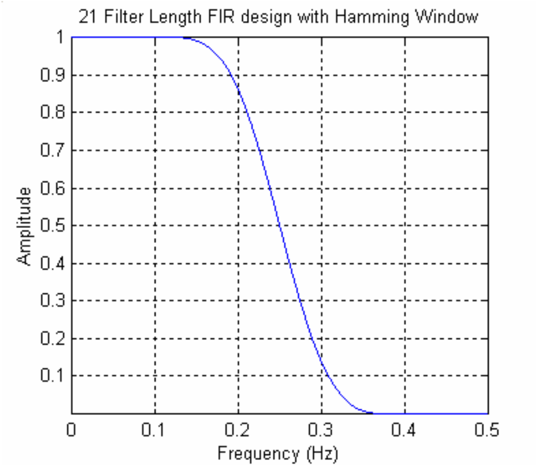


Figura 2.13. Resposta em amplitude de um filtro FIR LP com $f_c = 0.25$ e $N = 21$ projectado com uma janela rectangular (esquerda) e de Hamming (direita).

2.3.3 Projecto de Filtros FIR Óptimos

Seja $D(\omega)$ a característica desejada do filtro FIR e $H(\omega)$ a aproximação obtida. Então os desvios nas frequências, são

$$E(\omega) = D(\omega) - H(\omega)$$

Podemos atribuir um peso diferente à qualidade de ajuste em várias bandas, usando uma função de pesos $W(\omega)$:

$$E(\omega) = W(\omega)(D(\omega) - H(\omega))$$

O critério de ajuste óptimo, consiste em:

$$\text{Determinar } H(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \min\left\{\int_{-\pi}^{\pi} L(E(\omega))d\omega\right\}, \quad \forall\omega \in [-\pi, \pi]$$

Existem várias possibilidades para a função de custo L, p. ex.:

- $L(E(\omega)) = |E(\omega)|$. Critério de Tchebichef.
- $L(E(\omega)) = [E(\omega)]^2$. Critério dos mínimos quadráticos.

Normalmente para filtros prefere-se o critério de Tchebichef (critério equiripple), que satisfaz o *Teorema da Alternância*:

A função $H(\omega)$, definida pela soma de r cosenos, para satisfazer o critério de Tchebichef deverá ter pelo menos $r + 1$ extremos, alternando máximos e mínimos.

Para N ímpar e resposta simétrica o número de extremos, N_e, em $f \in [0, 0.5]$ é: $$N_e \le \frac{N+1}{2}$$

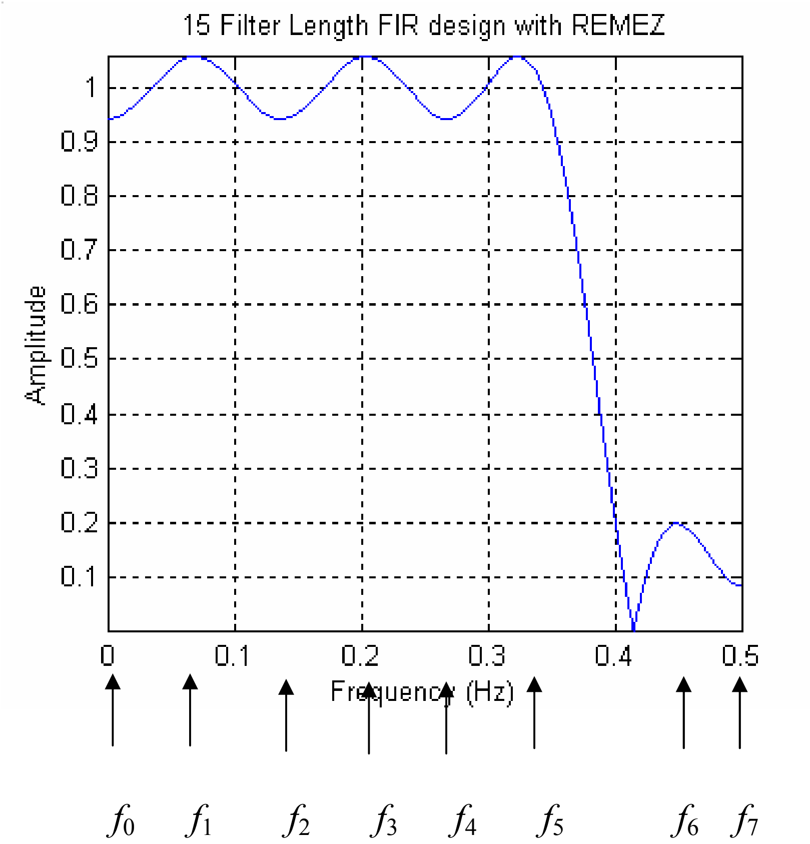


Figura 2.14. Exemplo ilustrativo do Teorema da Alternância. O filtro com N = 15 exibe 8 extremos, f_i: 6 na banda passante e 2 na banda de rejeição.

Projecto de um filtro FIR óptimo:

Parks and McClellan (1973) desenvolveram um método de determinação de um filtro óptimo segundo o critério de Tchebichef, usando o algoritmo da troca de Remez para obter um ajuste iterativo à resposta desejada.

O Filtro Equiripple Óptimo, para um dado N, é o filtro de menor equiripple e de menor banda de transição.

1. Há 4 parâmetros a especificar no caso de um filtro de duas bandas:

N comprimento do filtro
f_c frequência de corte superior
f_l frequência de corte inferior
R_p ripple na banda de passagem
R_l ripple na banda de rejeição

Se mantemos f_c e f_l e diminuímos $N \rightarrow$ aumentam R_p e R_l

Se mantemos R_p e R_l e diminuímos $N \rightarrow$ aumenta ΔB.

2. Estimativa de N, dados os outros parâmetros:

$$\widehat{N} = \frac{D(R_p, R_l)}{\Delta B} - f(R_p, R_l)\Delta B + 1$$

com:

$$D(R_p, R_l) = \left[a_1(\log_{10} R_p)^2 + a_2 \log_{10} R_p + a_3\right]\log_{10} R_l +$$
$$\left[a_4(\log_{10} R_p)^2 + a_5 \log_{10} R_p + a_6\right]$$

$$f(R_p, R_l) = b_1 + b_2(\log_{10} R_p - \log_{10} R_l)$$

a_1 = 5.309E-3	a_4 = -2.660E-3	b_1 = 11.01217
a_2 = 7.114E-2	a_5 = -5.941E-1	b_2 = 0.51244
a_3 = -4.761E-1	a_6 = -4.278E-1	

2.3.4 Aplicações de Filtros FIR

Notar que a filtragem com um filtro de comprimento *N* exibe caudas de comprimento *N*/2.

<u>Implementação prática:</u>

- Iniciar a filtragem N/2 amostras depois do princípio e terminar N/2 amostras antes do fim (usado em processamento on-line).
- Acrescentar N/2 amostras iguais aos valores extremos do sinal (usado em processamento off-line).

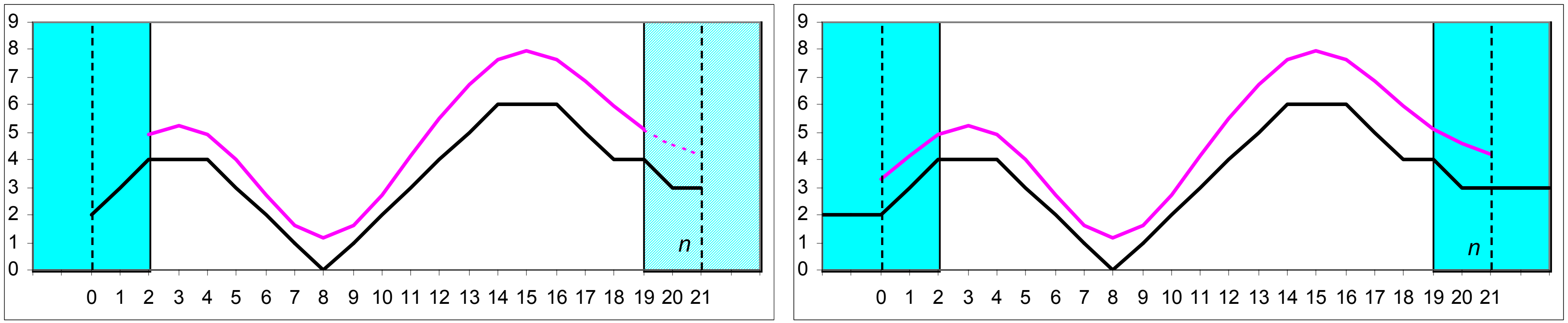
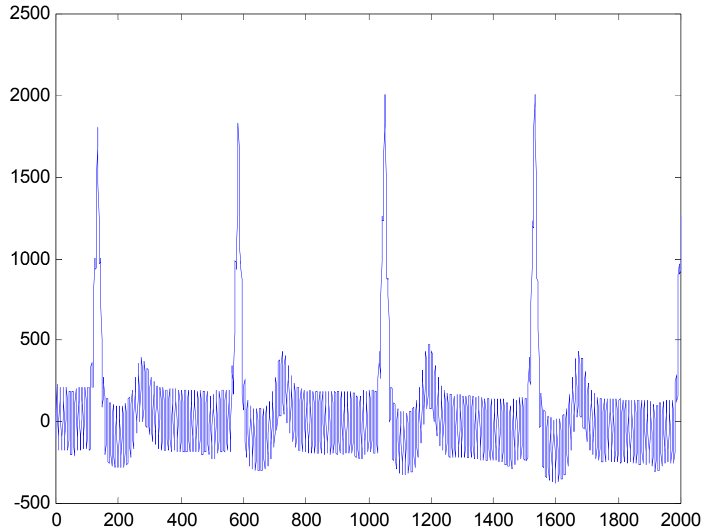


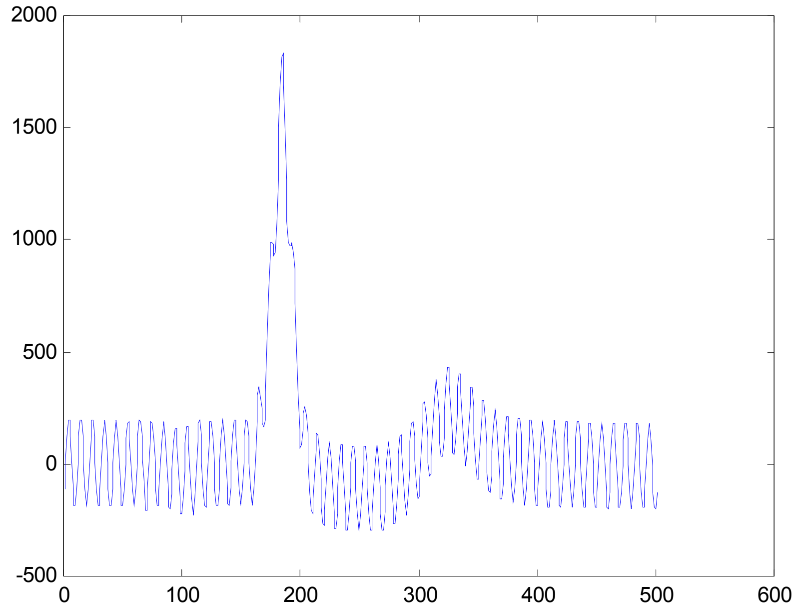
Figura 2.15. Duas versões de filtragem (violeta) de um sinal original (preto): on-line (em cima) e off-line (em baixo).

Exemplo 1:

Filtragem de ruído de 50Hz de um ECG amostrado a 500 Hz.

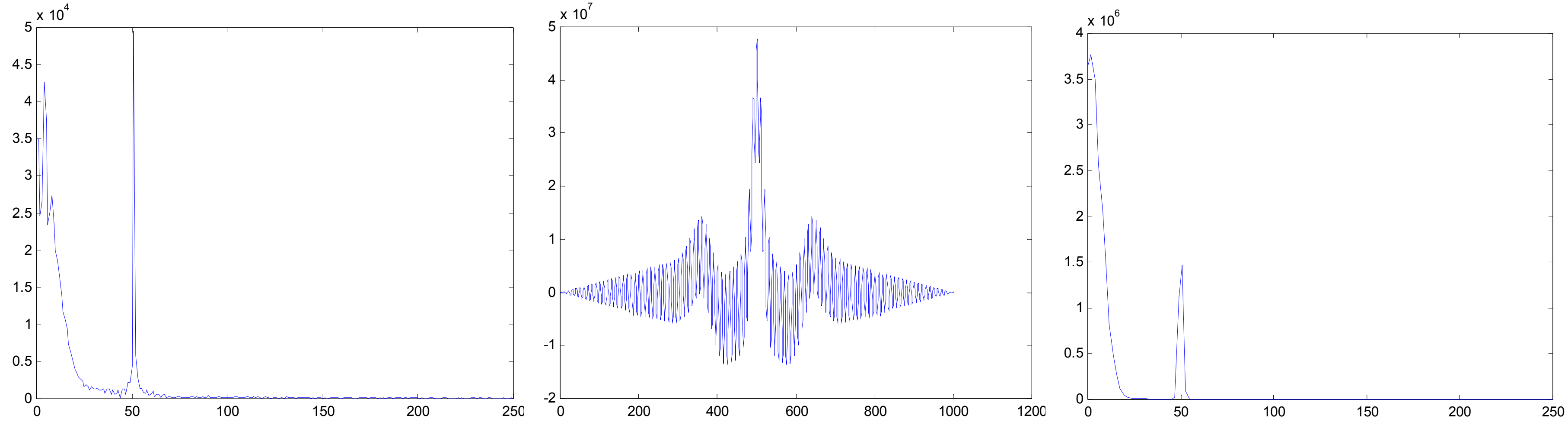


a



b

Figura 2.16. a) ECG amostrado a 500 Hz, com ruído de 50 Hz; complexo de ondas do sinal (entre as amostras 400-900).



a b c

Figura 2.17. a) Espectro do complexo de ondas do sinal (o ruído de 50 Hz é claramente visível); b) Autocorrelação, $r_{xx}(n)$, do complexo de ondas do sinal ($r_{xx}(0)$ é a energia do sinal + ruído = $4.7669*10^7$); c) Espectro de densidade espectral de energia (também chamado *espectro de potência*), $S_x(\omega)$ (transformada discreta de Fourier de $r_{xx}(n)$).

Do espectro de potência, deduz-se:

Energia do sinal = $3.7629*10^6$
Energia do ruído = $1.4721*10^6$ (soma dos dois valores próxima do valor de $r_{xx}(0)$)

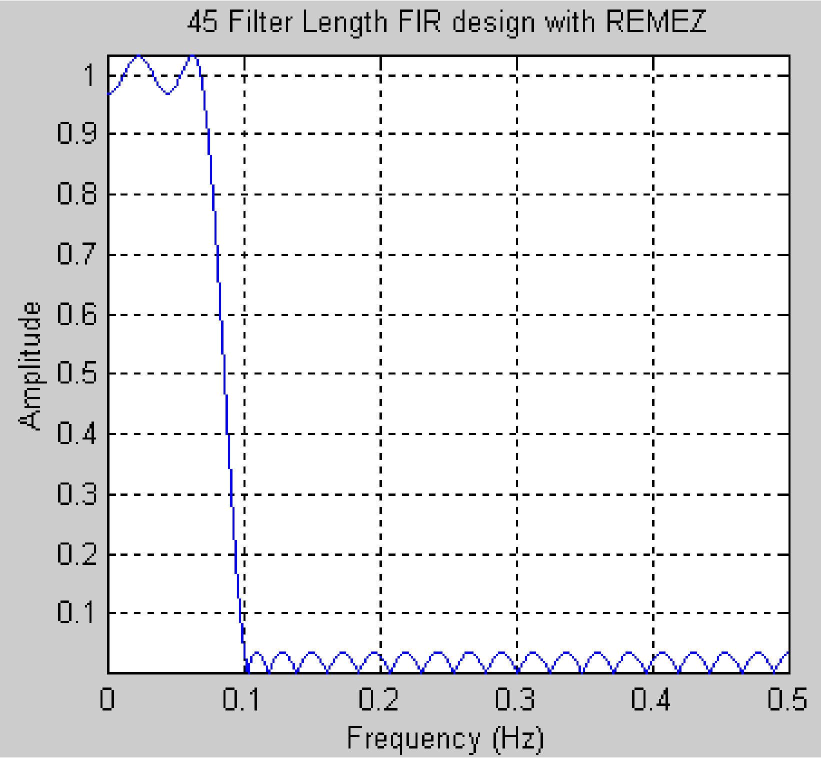
Logo, SNR $\cong 10\log_{10}(3.7629/1.4721) = 4$ dB.

Projecto de um filtro óptimo de Remez, LP:

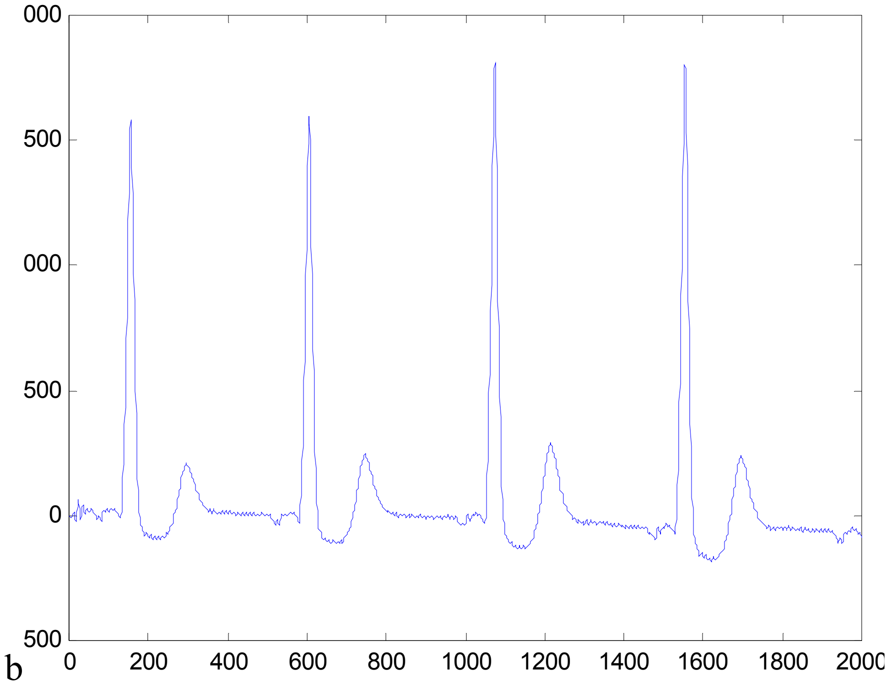
$f_l = 50/500 = 0.10.$

Tomamos $f_c = 0.07$ e ripples $R_c = 0.5\%$, $R_l = 30\text{dB}$.

Aplicando as fórmulas, obtém-se: N = 45.



a



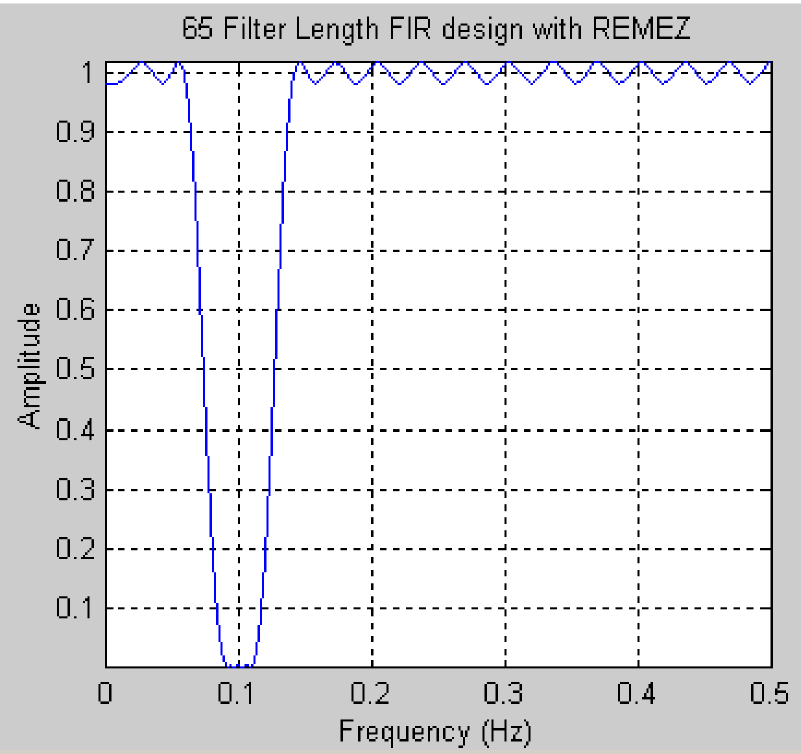
b

Figura 2.18. a) Característica do filtro óptimo de Remez, LP; b) Sinal ECG filtrado com filtro LP.

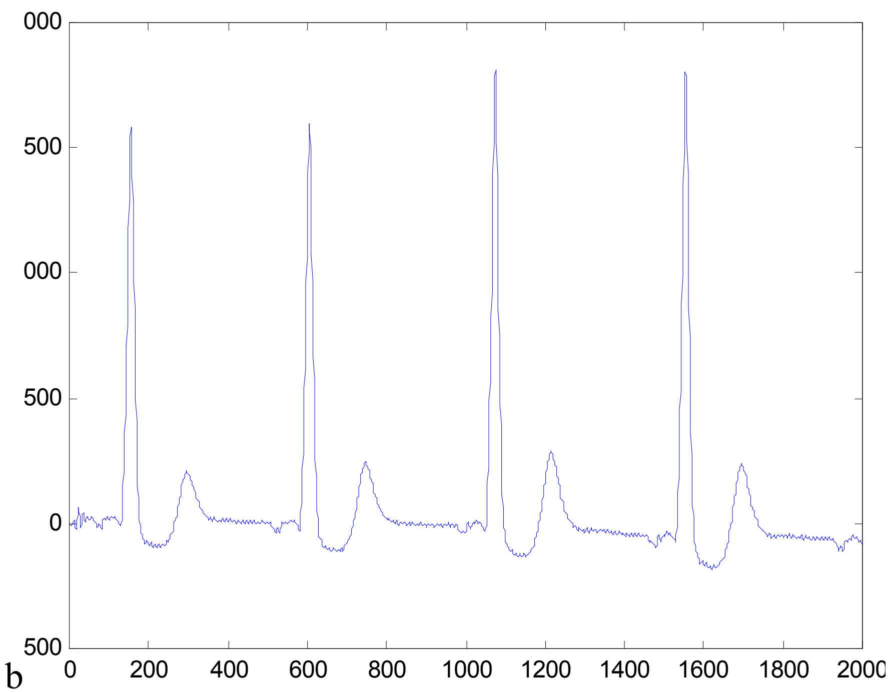
Projecto de um filtro óptimo de Remez, BP:

$f_{c1} = 0.06$; $f_{c2} = 0.14$
$f_{l1} = 0.09$; $f_{l2} = 0.11$
$R_c = 1\%$; $R_l = 40$ dB

Aplicando as fórmulas, obtém-se: $N = 65$.



a



b

Figura 2.19. a) Característica do filtro óptimo de Remez, BP; b) Sinal ECG filtrado com filtro BP.

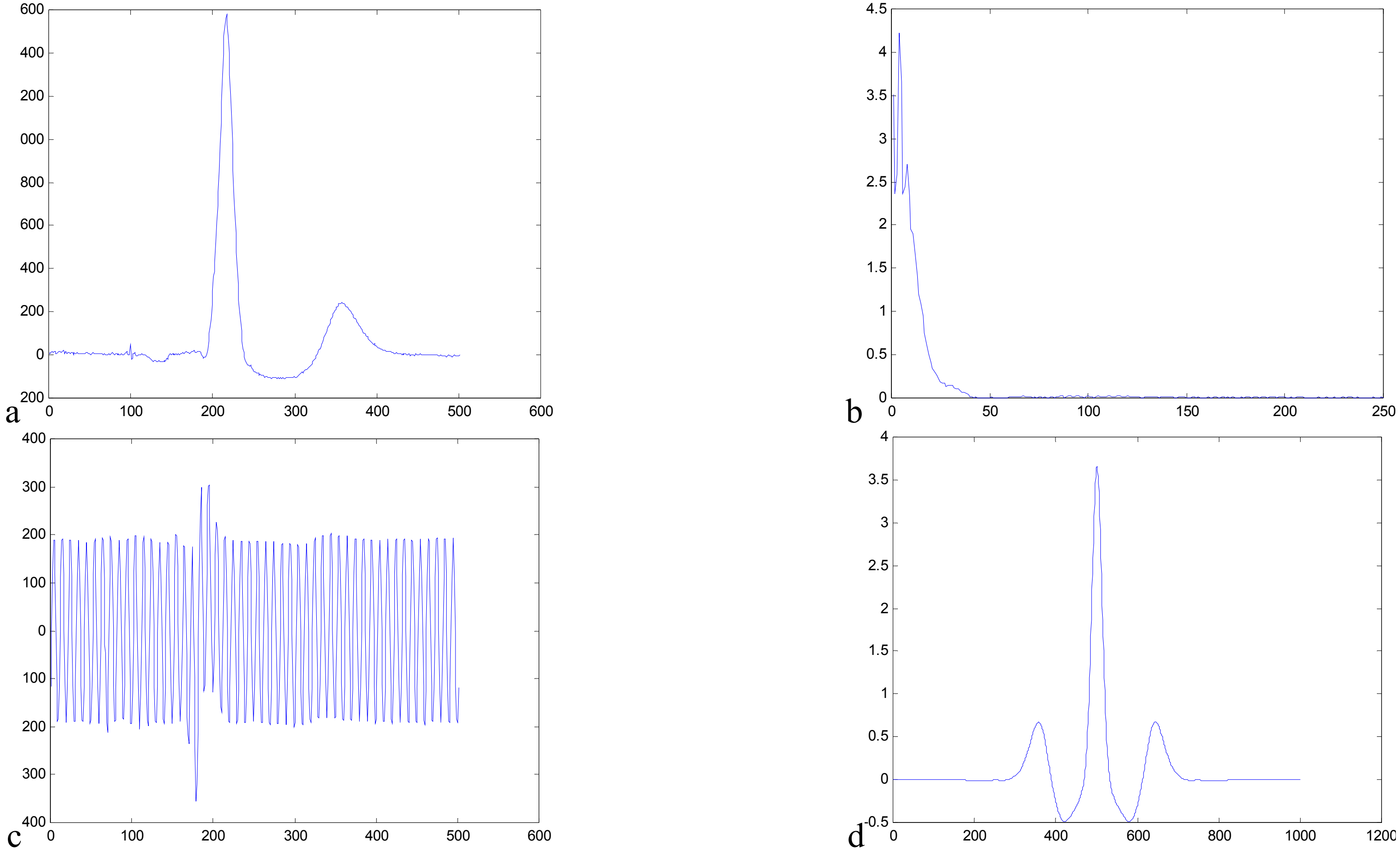
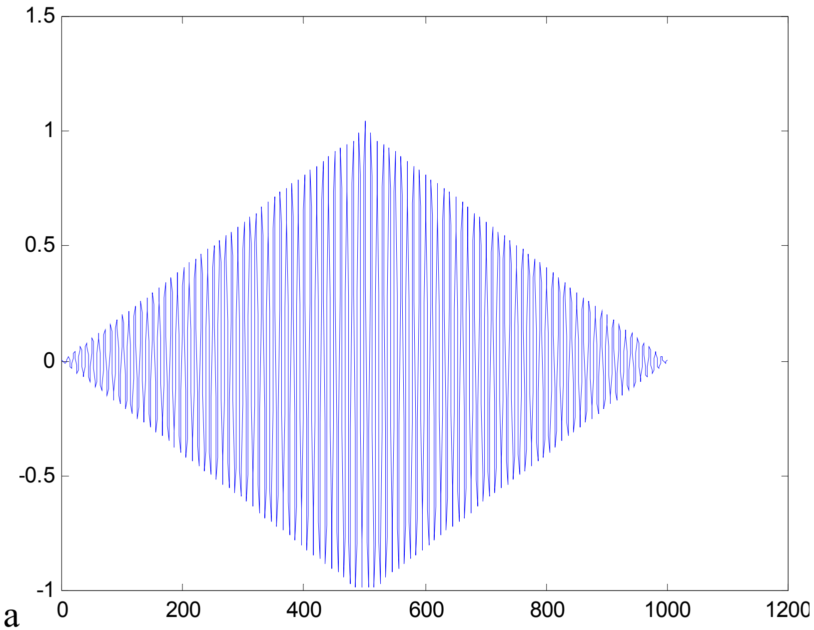
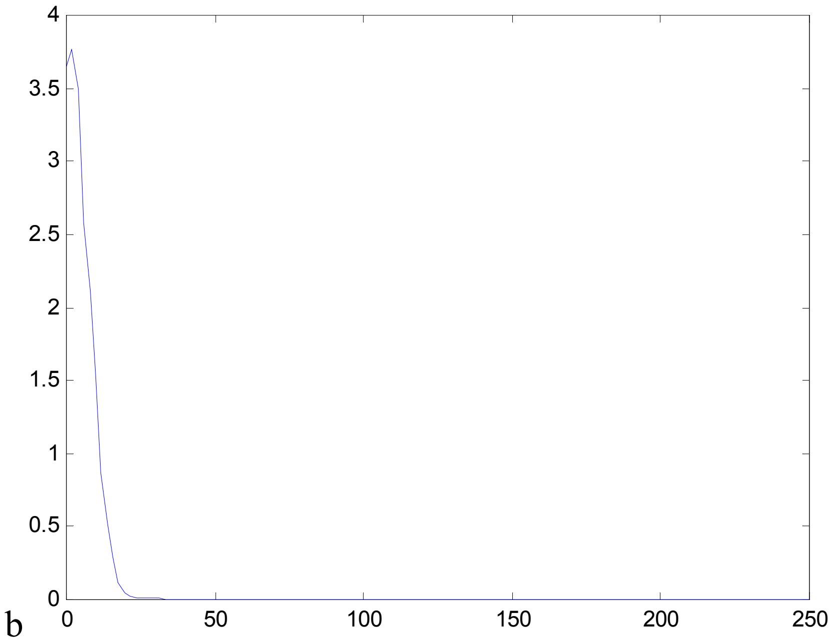


Figura 2.20. a) Complexo de ondas do ECG filtrado com filtro BP (entre amostras 433-933: Matlab fornece o sinal filtrado avançado de *N*/2); b) Espectro de potência do complexo filtrado com filtro BP; c) Diferença entre o complexo do sinal original (400:900) e filtrado (433:933); d) Autocorrelação do sinal filtrado. Energia=3.66*10^7.



a



b

Figura 2.21. a) Autocorrelação do ruído, determinado pela diferença entre sinal original e sinal filtrado. Energia: $1.048*10^7$; b) Espectro de potência do sinal ECG filtrado com filtro óptimo de Remez, BP.

Energia do sinal = $3.7692*10^6$
Energia do ruído = $0.0144*10^3$

SNR $\cong 10\log_{10}(3.7629/1.4721) = 54$ dB

Logo, a filtragem melhorou a relação sinal/ruído em 50 dB.

2.4 Filtros IIR

2.4.1 Conversão de filtros analógicos para filtros digitais

Método de invariância de resposta impulsional:

Trata-se de usar como resposta de um filtro discreto a amostragem da resposta de um filtro analógico.

Problema: aloctonicidade. Aplicação limitada.

Relação entre o domínio *s* e o domínio *z*:

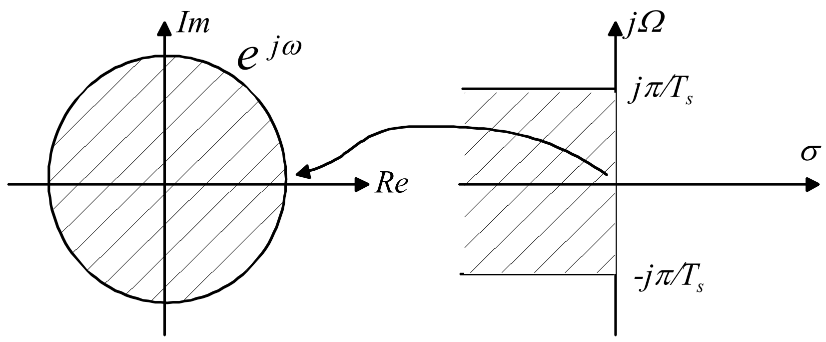


Figura 2.22. Relação entre domínios s e z. O segmento de s = 0 a $s = j\pi/T_s$ é mapeado na semicircunferência superior de z = 0 a z = -1. O segmento de s = 0 a $s = -j\pi/T_s$ é mapeado na semicircunferência inferior de z = 0 a z = -1.

- Semiplano esquerdo em s mapeia para interior de círculo unitário
- Polo em $s=s_p$ mapeia para polo em $z = e^{s_p T_s}$

Transformação bilinear:

Transformação não-linear que permite implementar filtros discretos de características semelhantes aos filtros analógicos:

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{sT_s/2+1}{sT_s/2-1}$$

Logo:

$$e^{j\omega} = \frac{j\Omega T_s/2+1}{j\Omega T_s/2-1} = e^{j2\arctan(\Omega T_s/2)} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\arctan(\Omega T_s/2)$$

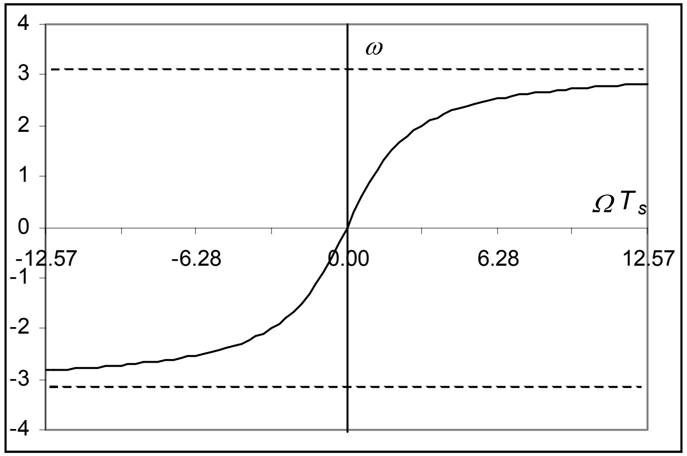


Figura 2.23. Mapeamento de frequências do domínio analógico para o discreto, usando a transformação bilinear.

Por forma a compensar a distorção para altas frequências, efectua-se o pré-enrolamento de Ω:

$$\Omega^* = \frac{2}{T_s}\tan\left(\frac{\Omega T_s}{2}\right)$$

Usando a transformação bilinear é possível obter filtros discretos ARMA a partir de filtros analógicos conhecidos.

Mapeamento de um pólo $s=s_p$:

$$H(s)=\frac{1}{s-s_p}\quad\Rightarrow\quad H(z)=\frac{T_s}{2-s_pT_s}\,\frac{1+z^{-1}}{1-\dfrac{2+s_pT_s}{2-s_pT_s}z^{-1}}$$

A transformada em z tem:

- Um zero em -1
- Um pólo em $\dfrac{2+s_pT_s}{2-s_pT_s}$
- Um ganho de $g=H(0)=-s_p^{-1}$

2.4.2 Filtros IIR correspondentes a protótipos analógicos

<u>Protótipos analógicos LP:</u>

<u>Filtros de Butterworth:</u>

$$H(s)H(-s)=\frac{1}{1+(s/j\Omega_c)^{2N}};\qquad |H(\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

Logo: $|H(\Omega)|_{dB}=-10\log_{10}\left[1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}\right]$

Para Ω elevado, temos: $\lim_{\Omega \to \infty} |H(\Omega)|_{dB} = -20N \log_{10} \Omega$

- $2N$ pólos conjugados no círculo unitário, em

$$s_p = \Omega_c \exp\left[j\pi \frac{N + 2p + 1}{2N} \right], \quad 0 \le p \le 2N - 1$$

- Decaimento de -3dB para Ω_c
- Decaimento de $20N$ dB/década (ou $6N$ dB/oitava). O filtro aproxima-se do filtro ideal com $N \to \infty$.

Filtros de Tchebichef:

$$H(s)H(-s)=\frac{1}{1+\mu^2 C_N^2(s/j\Omega_c)}; \qquad |H(\Omega)|^2=\frac{1}{1+\mu^2 C_N^2(\Omega/j\Omega_c)}$$

com o polinómio de Tchebichef de grau N:

$$C_{N+1}(x)=2xC_N(x)-C_{N-1}(x); \quad C_0(x)=1, \quad C_1(x)=x$$

- Menor banda de transição, entre todos os filtros que usam só pólos, para dados ripples.
- $R_p=\left(1+\mu^2\right)^{-1}$
- Decaimento de 20N dB/década (ou 6N dB/oitava).
- Os pólos jazem numa elipse, de acordo com $s_p=r\cos\theta+jR\sin\theta$, sendo os eixos menor e maior respectivamente $r=\Omega_c\left(\rho^{1/N}-\rho^{-1/N}\right)/2$, e $R=\Omega_c\left(\rho^{1/N}+\rho^{-1/N}\right)/2$ com $\rho=\mu^{-1}+\sqrt{1+\mu^{-2}}$, e em ângulos θ igualmente espaçados no círculo unitário.

Filtros elípticos:

$$H(s)H(-s)=\frac{1}{1+\varepsilon^2 E_N^2(s/j\Omega_c)}; \qquad |H(\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 E_N^2(\Omega/j\Omega_c)}$$

com $E_N(x)$ a função elíptica Jacobiana de grau N.

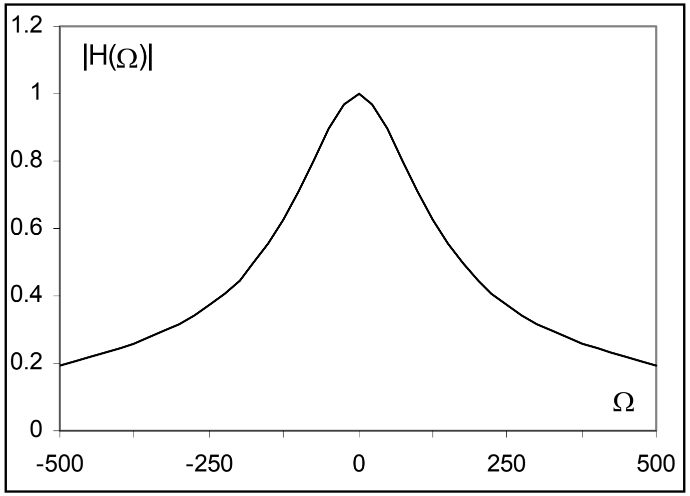
- O filtro inclui zeros para além de pólos e tem menor banda de transição que os anteriores, para dados ripples.
- R_p depende de ε.

Exemplos:

a)
Determinação do filtro IIR passa-baixo destinado a ser usado com sinais amostrados a f_s = 500 Hz, correspondente a um filtro de Butterworth com decaimento de 20 dB por década e Ω_c= 100 Hz.

Ordem do filtro: 20 dB por década $\rightarrow$ N=1 (2 pólos conjugados)

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^2}$$



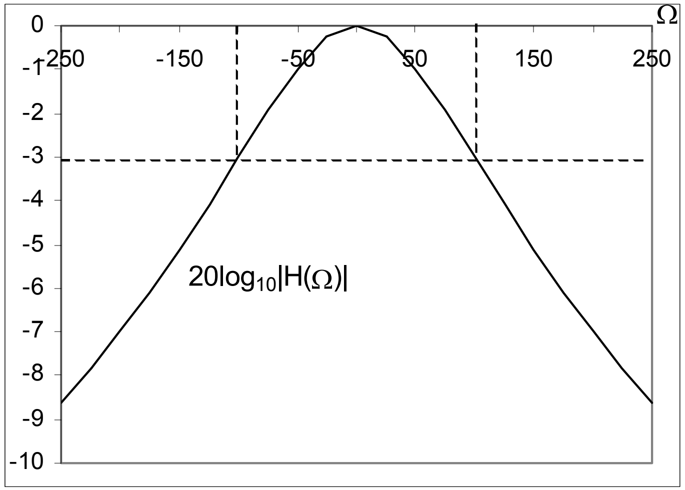


Figura 2.24. Amplitude em valor absoluto (esquerda) e em dB (direita) do filtro de Butterworth do exemplo.

Pré-enrolamento de Ω_c:

$$T_s = 0.002\ s; \qquad \Omega^* = \frac{2}{0.002}\tan\left(\frac{0.2}{2}\right) = 100.3347$$

Logo:

$$H(z) = 0.00909\,\frac{1+z^{-1}}{1-0.818z^{-1}}$$

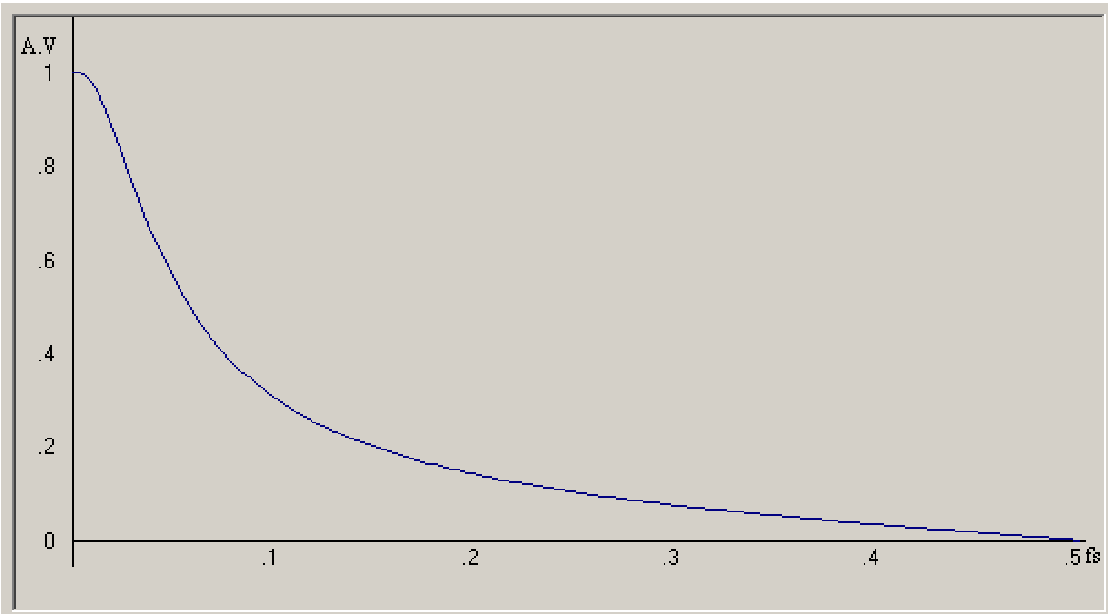
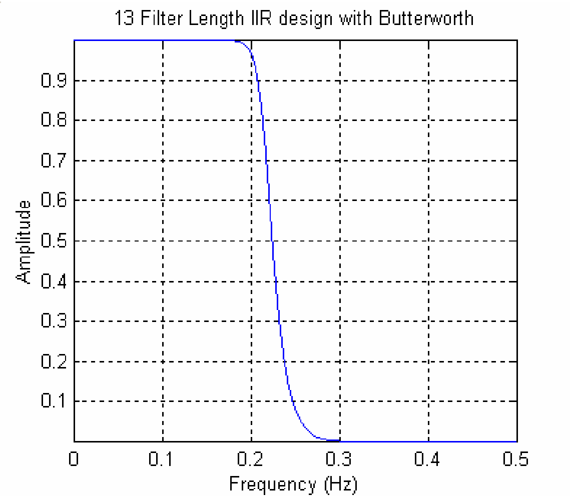


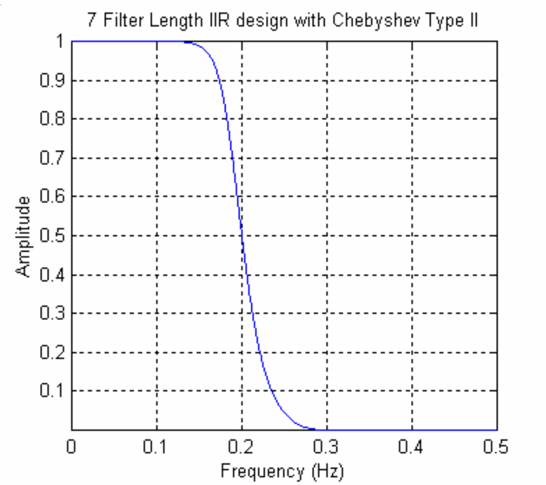
Figura 2.25. Filtro IIR correspondente ao de Butterworth do exemplo.

b)
Filtros digitais para as seguintes especificações:

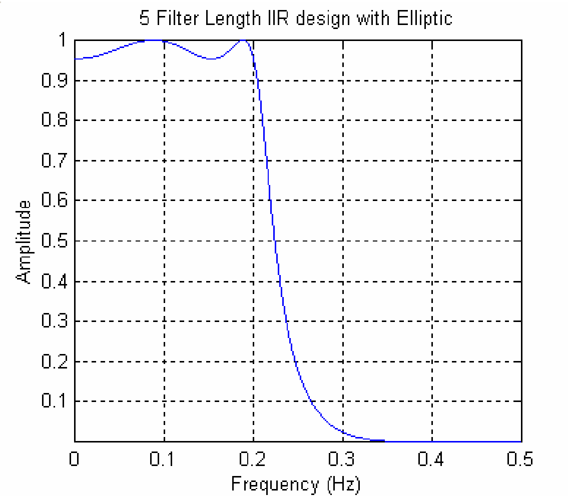
$f_c = 0.20$; $f_l = 0.30$.
$R_c = 1.1\%$; $R_l = 60\text{dB}$.



Butterworth, $N = 13$



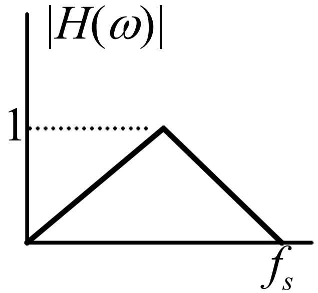
Tchebichef, $N = 7$



Elíptico, $N = 5$

Figura 2.26. Filtros IIR para idênticas especificações em Labsin.

2.4.3 Diferenciadores



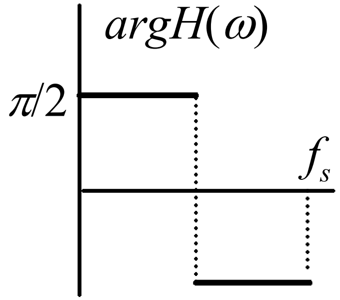


Figura 2.27. Característica do diferenciador ideal.

Consideremos aproximações do diferenciador ideal por:

$$H(z) = A.\prod_{k=1}^{n} \frac{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}}{1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}$$

Condições a impor:

- Diferenciação de uma constante é zero $\Rightarrow$ filtro tem zero em $z = 1$.

$$H(z) = (1 - z^{-1})H_1(z)$$

- Diferenciação da rampa é uma constante:

$$i(n) = cn \quad \Rightarrow \quad I(z) = c\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$\text{Logo } Y(z) = H(z)I(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = H_1(z)c\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Por forma a $y(n)$ aproximar c para valores crescentes de n o Teorema do valor final impõe $H_1(z=1)=1$, o que condiciona o ganho A. Por forma a satisfazer as condições acima, temos:

$$H(z) = (1-z^{-1})\frac{1-a_{12}z^{-1}}{1-a_{12}}\prod_{k=2}^{n}\frac{1+a_{k1}z^{-1}+a_{k2}z^{-2}}{1+a_{k1}+a_{k2}}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+b_{k1}+b_{k2}}{1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2}}$$

Um filtro simples e popular é o bem conhecido:

$$\text{F1:} \quad H(z) = 1 - z^{-1}$$

$H(z)$ pode ser determinado minimizando um critério de erro:

$$J = \int_0^{\pi} \varepsilon(\omega)d\omega$$

com $\varepsilon(\omega)$ representando o erro absoluto para uma sinusóide:

$$\varepsilon(\omega) = \left(\frac{\delta A^2}{A^2} + \delta\varphi^2\right)^{1/2} + O^2(\delta)$$

onde $O^2(\delta)$ representa termos de ordem superior que podem desprezar-se.

A minimização de J pode efectuar-se por técnicas de programação não-linear. Uma solução de ordem 2 é:

F2: $$H(z) = 1.1115 \frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 0.8125 z^{-1}\right)}{\left(1 - 0.8038 z^{-1}\right)\left(1 + 0.0657 z^{-1}\right)}$$

F2 tem melhor desempenho que F1, especialmente para altas frequências.
Para mais detalhes consultar (Spriet J, Bens J, 1979).

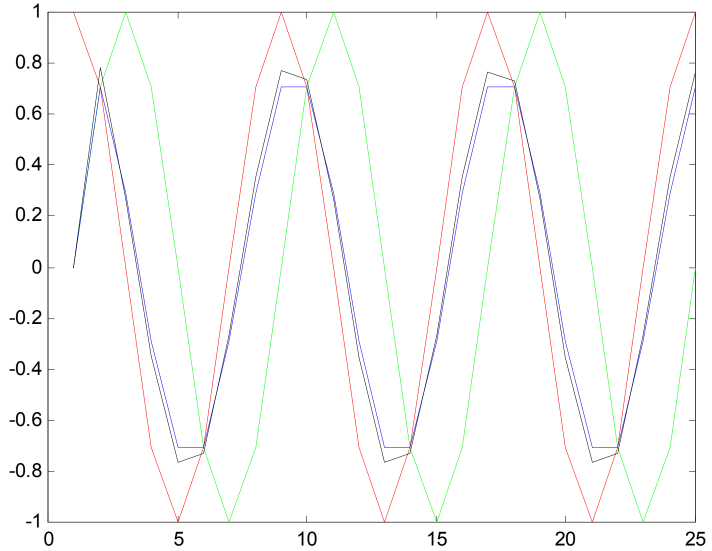


Figura 2.28. Diferenciação de parte de um seno (verde) com ω=2π/8: resultado teórico (vermelho); resultado com F1 (azul); resultado com F2 (preto).

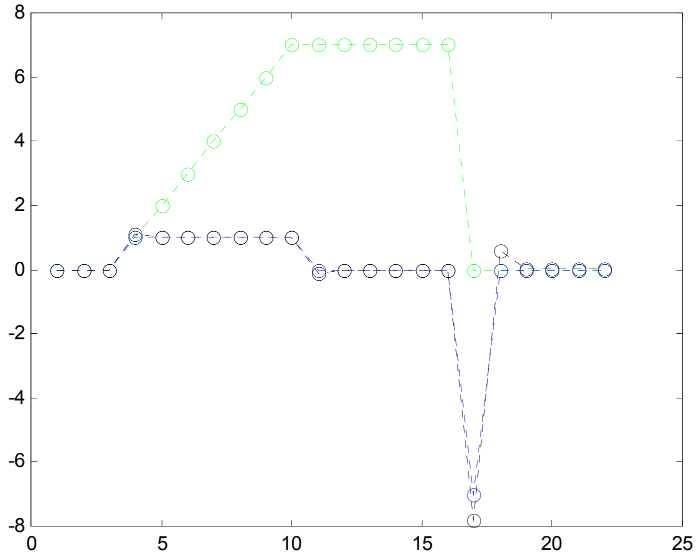


Figura 2.29. Diferenciação de um sinal (verde) com F1 (azul) e F2 (preto).

2.4.4 Aplicações de filtros IIR

Os filtros IIR têm, em geral, fase não linear, pelo que a sua aplicação em filtragens tem inconvenientes, se se pretende manter no essencial a morfologia dos sinais.

Se dispomos de todo o sinal, podemos remediar este aspecto efectuando duas filtragens: uma para tempos crescentes e outra para tempos decrescentes. De facto:

$$h(-n) \otimes (h(n) \otimes s(n)) \quad \Leftrightarrow \quad H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega})S(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 S(e^{j\omega})$$

Exemplo:

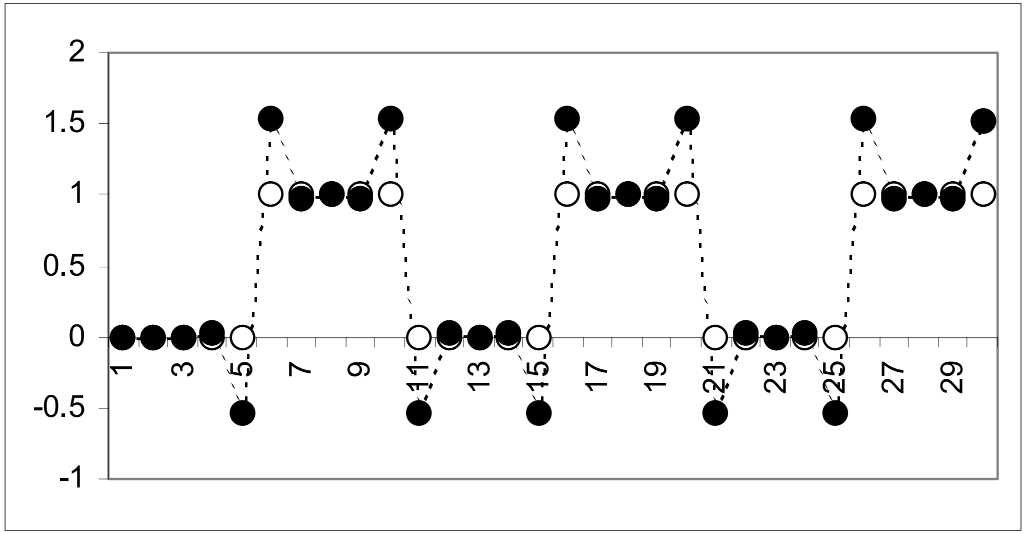


Figura 2.30. Exemplo da Figura 2.3 filtrado de novo em tempo decrescente (para um filtro FIR basta efectuar uma segunda filtragem com a reflexão da resposta impulsional).

Os filtros IIR são úteis p. ex. na determinação da presença de certos componentes de onda ou da energia do sinal em diversas bandas espectrais (a morfologia não interessa).

Exemplo: Determinação de estados comportamentais do EEG.

Acordado (vigilância)

Sonolência (olhos quase fechados)

Sono REM

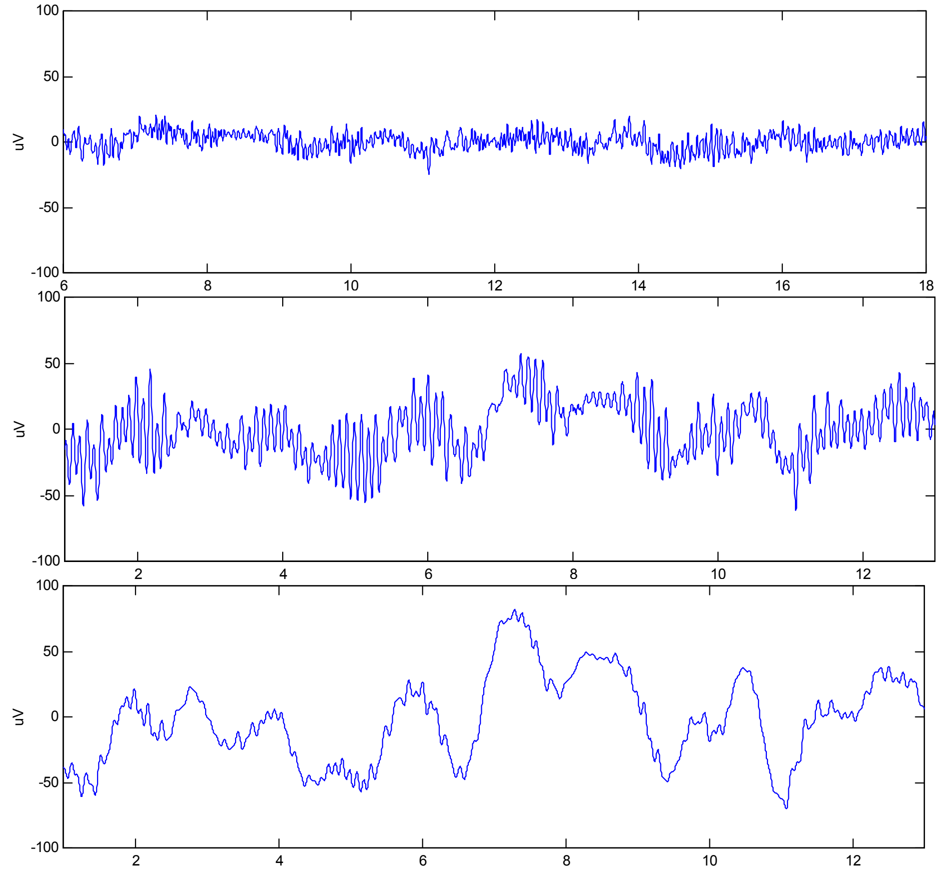


Figura 2.31. Três sinais EEG correspondentes a distintos estados comportamentais (amplitude em μV; f_s = 128 Hz).

Bandas de interesse do EEG:

Banda delta: $<= 4$ Hz

Banda teta: 4 - 8 Hz

Banda alfa: 8 - 13 Hz

Banda beta: 13 - 35 Hz

Tarefa: Detecção de actividade alfa, usando um filtro de banda elíptico (f_s = 128 Hz), com:

$f_{c1} = 0.06$ (6.68 Hz); $f_{c2} = 0.10$ (12.80 Hz)

$f_{l1} = 0.05$ (6.40 Hz); $f_{l2} = 0.12$ (15.36 Hz)

$R_c = 1.1\%$; $R_l = -40$dB

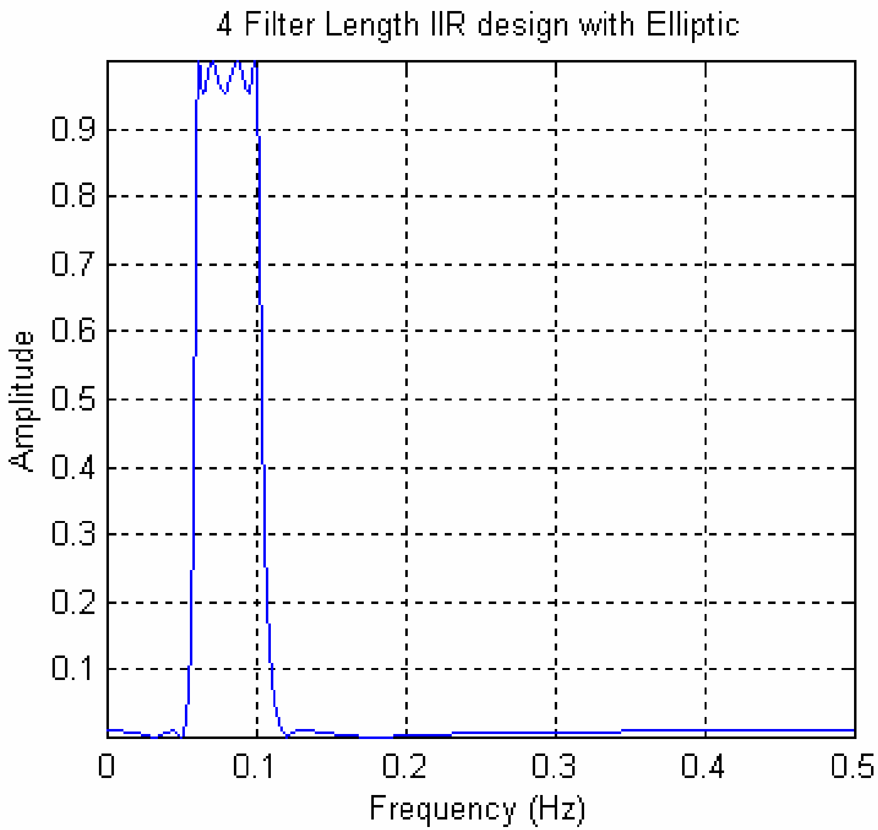
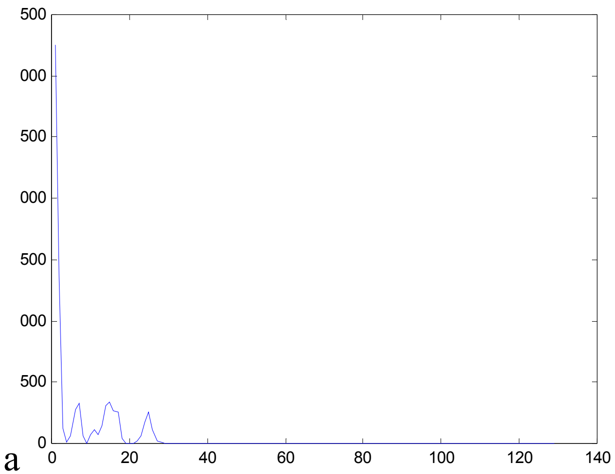


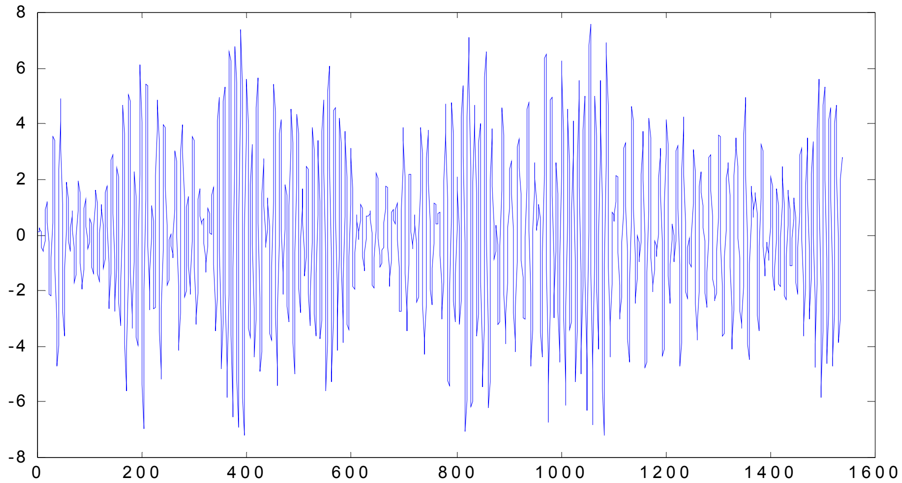
Figura 2.32. Característica em amplitude do filtro elíptico utilizado para detecção da banda alfa do EEG (ordem *N* = 4).

```
b=[1.103509e-002 -6.832768e-002 1.985402e-001 -3.547953e-001 4.271205e-001 -3.547953e-001 1.985402e-001 -6.832768e-002 1.103509e-002 ]
a = [1 -6.734115e+000 2.068581e+001 -3.770425e+001 4.452511e+001 -3.486347e+001 1.768644e+001 -5.324379e+000 7.313430e-001 ]
```

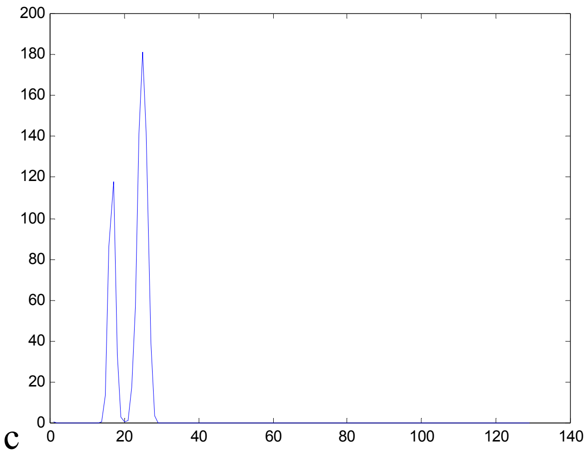
Caso 1 – Vigilância



a



b

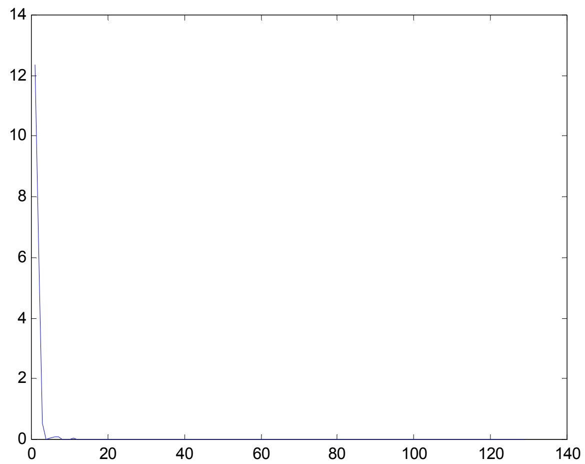


c

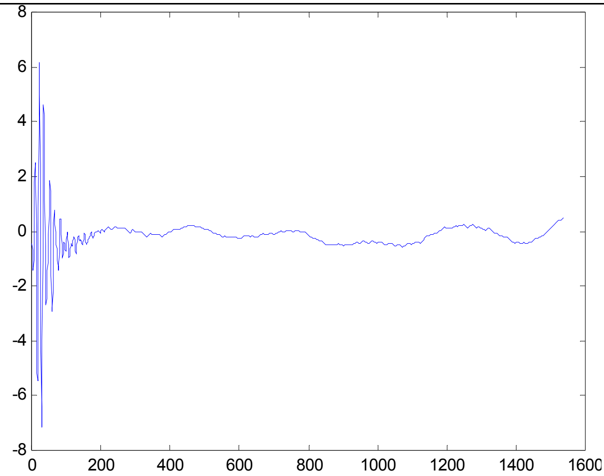
Figura 2.33. a) Espectro de potência do EEG de vigilância calculado com N_{fft} = 256 (matlab psd). A amostra 20 corresponde à frequência (20/256)*128=10 Hz; b) Sinal alfa do EEG de vigilância; c) Espectro de potência do sinal alfa de vigilância (Máximo ≈ 180).

Caso 2 - Sono REM

a



b



c

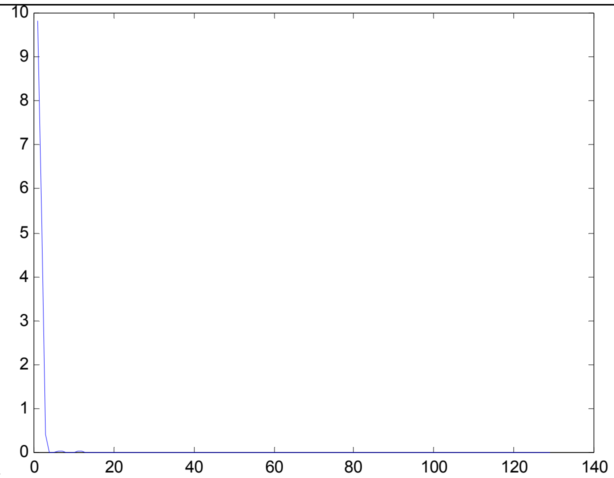


Figura 2.34. a) Figura 2.35. Espectro de potência do EEG de sono REM; b) Sinal alfa do EEG de sono REM. As primeiras ~200 amostras correspondem a um transiente devido à filtragem; c)Espectro de potência do sinal alfa de sono REM (Máximo ≈0).

2.5 Decimação-Interpolação

Considere-se o problema de remover a flutuação de linha-base, de um ECG amostrado a 500 Hz. A flutuação implica frequências máximas ≤ 1 Hz.

Usando um filtro FIR rectangular precisaríamos de: $N = 500$!

Teremos de usar esquemas de redução de frequência de amostragem.

2.5.1 Decimação

Diminuição da frequência de amostragem por um factor de D (inteiro).

1. Se o sinal $x(n)$ fosse simplesmente decimado haveria forte distorção devido à aloctonicidade.

2. É necessário, em antes, remover com um filtro passa-baixo a banda superior a π/D.

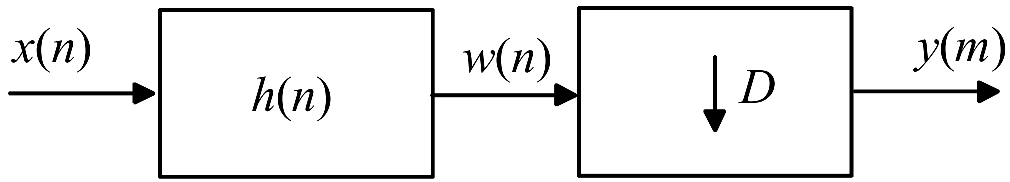


Figura 2.36. Sistema de decimação.

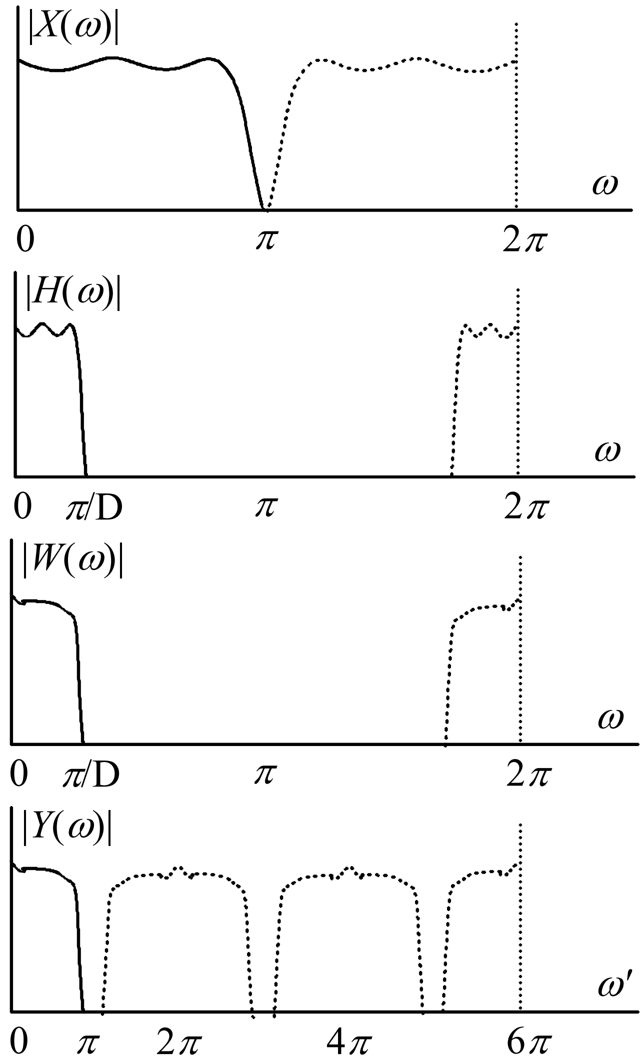


Figura 2.37. Exemplos de espectros para a decimação.

2.5.2 Interpolação

Consiste em aumentar a frequência de amostragem por um factor I (inteiro).

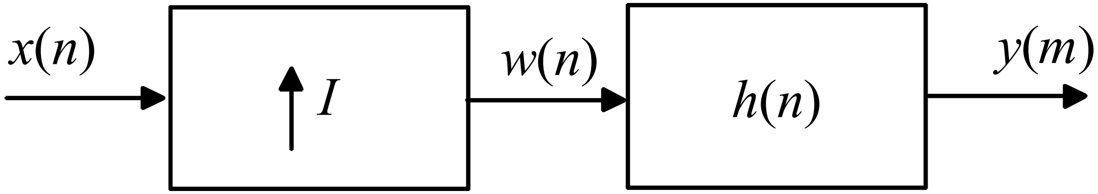


Figura 2.38. Sistema de interpolação.

Interpolação e decimação são operações duais.

Como se vê a seguir, os filtros a usar na decimação e interpolação com $D = I$ podem ser os mesmos.

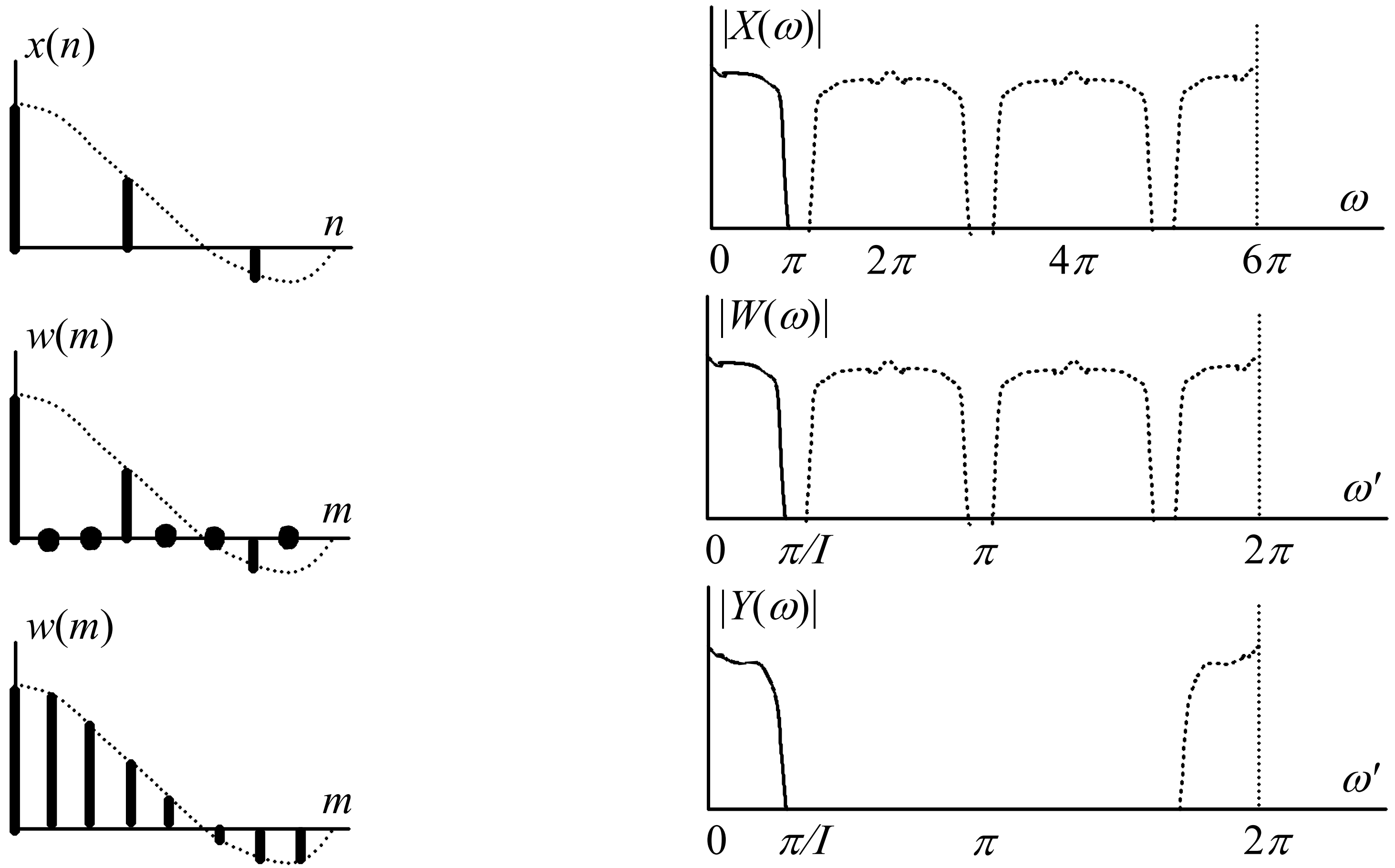


Figura 2.39. Exemplos de sinais e espectros na operação de interpolação.

Exemplo:

Sinal $x(n)$ constituído ela soma de dois cosenos $x(n) = s_1(n) + s_2(n)$, respectivamente de frequência $f_1 = 0.1$ e de frequência $f_2 = 0.3$.

A remoção de $s_1(n)$ de $x(n)$ poderia ser feita directamente com:

- Um filtro rectangular de comprimento $N = 10$
- Um filtro de Remez de comprimento $N \approx 7$

Obtenção de $s_1(n)$ por decimação-interpolação, com vista à sua posterior remoção:

- Um filtro de $N = 7$ (zero em $f_l = 0.14$ se filtro rectangular)
- Um factor $D = I = 3$ $(0.5/3 = 0.167 > f_l)$

Decimação-interpolação, usando um filtro rectangular, $N = 7$:

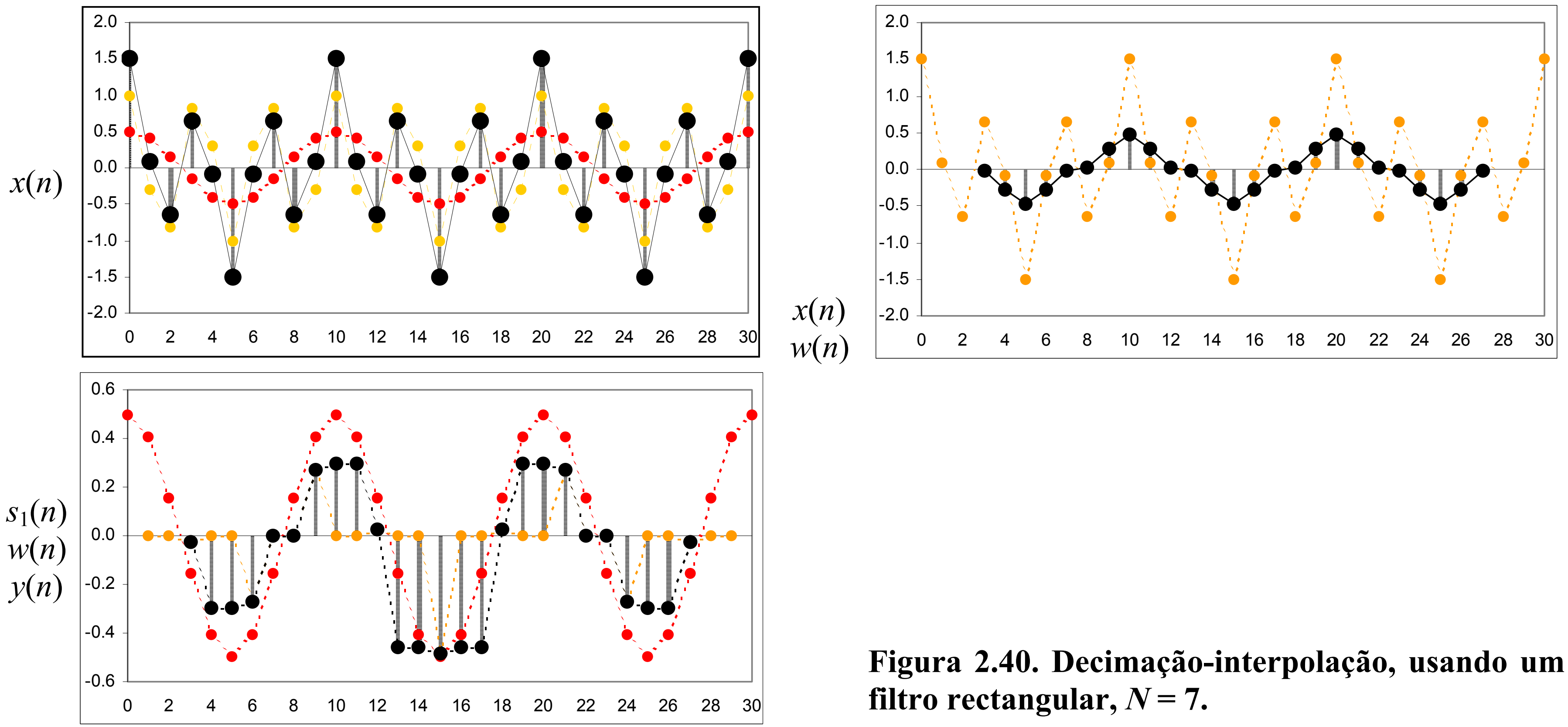


Figura 2.40. Decimação-interpolação, usando um filtro rectangular, $N = 7$.

Decimação-interpolação, usando um filtro de Remez:

Especificações: 0.1, 0.3; 1%, -50dB; $N = 7$

[2.22E-02 1.24E-01 2.67E-01 3.39E-01 ...]

$x(n)$
$w(n)$

$s_1(n)$
$w(n)$
$y(n)$

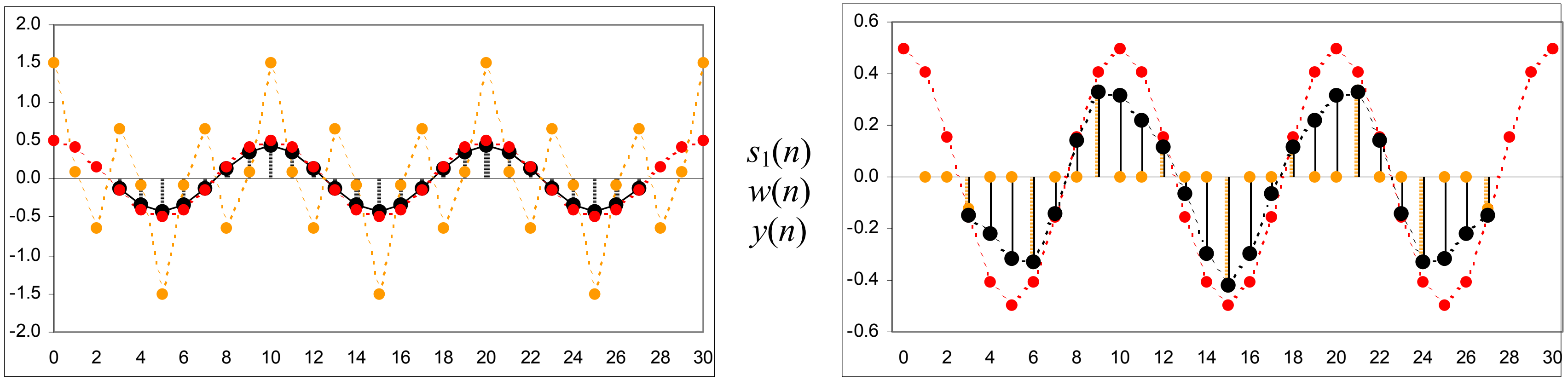


Figura 2.41. Decimação-interpolação, usando um filtro de Remez, *N*=7.

2.5.3 Filtro interpolador óptimo

(Oetken G, Parks TW, Schüssler HW, 1975)

Seja um filtro $h(n)$ que interpola $r-1$ amostras, de comprimento múltiplo de r:

$$N = 2rL+1$$

$$y(n) = \sum_{\mu=-rL}^{rL} h(\mu)u(n-\mu)$$

$u(n)$ é o sinal decimado do sinal original $u_0(n)$. Queremos que $y(n)$ seja uma "boa" estimativa de $u_0(n)$.

Dada a presença de $u(\lambda r)\neq 0$ há duas situações de interpolação (ver Figura):

- $n = \lambda r$: então $y(n)$ usa $2L+1$ amostras de $u(n)$
- $n = \lambda r + \rho, \quad \rho \in [1, r-1]$: então $y(n)$ usa $2L$ amostras de $u(n)$

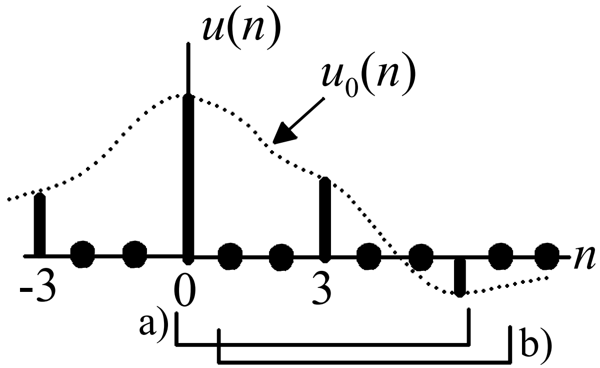


Figura 2.42. Interpolação para r=3. Com um filtro de ordem N=7 (L=1) são usadas as seguintes amostras não nulas: a) caso λ=1: 3 amostras: $u(0)$, $u(3)$ e $u(6)$; b) caso λ=1, ρ=1: 2 amostras: $u(3)$ e $u(6)$.

É possível definir, então, r sequências de erro:

$$\Delta y_{\rho}(n) = y_{\rho}(n) - x_{\rho}(n) \qquad \text{e} \qquad \left\|\Delta y\right\|^2 = \sum_{\rho=0}^{r-1}\left\|\Delta y_{\rho}(n)\right\|^2,$$

usando as subsequências de $u_0(n)$ e $y(n)$:

$$u_0(n) = \sum_{\rho=0}^{r-1} x_{\rho}(n) \qquad \text{e} \qquad y(n) = \sum_{\rho=0}^{r-1} y_{\rho}(n)$$

Cada sequência de erro depende de uma subsequência de $h(n)$, p. ex. na Figura $\Delta y_1(n)$ depende de $h(-1)$ e $h(2)$.

O projecto do interpolador óptimo é dividido no projecto de r subfiltros que minimizam $\| \Delta y_o(n) \|^2$:

$$H_{\rho}(z) = \sum_{n=-Lr}^{Lr} h_{\rho}(n) z^{-n}$$

Condições impostas ao espectro de $u_0(n)$:

- Banda não excedendo $f_g < 1/r$ (ver Figura)

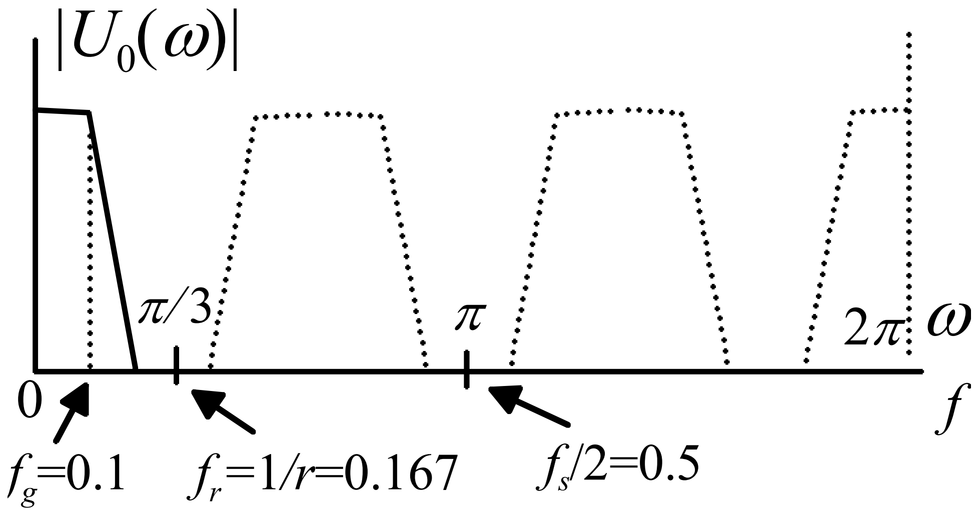


Figura 2.43. Um sinal de banda limitada, $f_g < 1/r$. O factor de ocupação de banda é: $\alpha = 2rf_g = 0.6$.

Para entrada sinusoidal:

$$u_0(n) = U_0(\omega_0)\, e^{j\omega_0 n}, \quad \text{com} \quad \omega_0 < \omega_g = \alpha \frac{\pi}{r}; \quad \alpha \in \left]0,1\right[$$

α é um factor de ocupação de banda: $\alpha = 2rf_g$.

Obtém-se:

$$\left\|\Delta Y_\rho(\omega)\right\|^2 = \frac{1}{r^2}\sum_{\nu=0}^{r-1}\left|H_\rho(\omega - \nu\frac{2\pi}{r}) - e^{j\rho\nu(2\pi/r)}\right|^2 \left|U_0(\omega)\right|^2$$

A característica ideal, $H_\rho(\omega - \nu\frac{2\pi}{r}) = e^{j\rho\nu(2\pi/r)}$, é a da Figura.

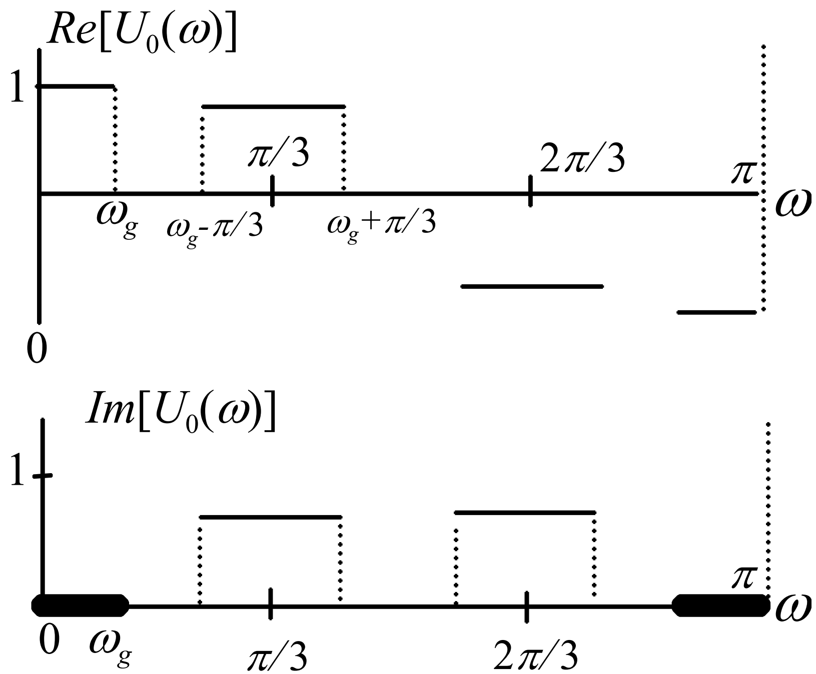


Figura 2.44. Característica do interpolador ideal para r = 3.

A solução MMQ é:

$$\mathbf{h}_\rho = \mathbf{\Phi}_T^{-1}\mathbf{\Phi}_\rho$$

com:

$$\mathbf{h}_\rho = \left[h(-Lr+\rho) \quad h(-(L-1)r+\rho) \quad \ldots \quad h(\rho) \quad \ldots \quad h((L-1)r+\rho)\right]'$$
$$\mathbf{\Phi}_\rho = \left[\phi(-Lr+\rho) \quad \phi(-(L-1)r+\rho) \quad \ldots \quad \phi(\rho) \quad \ldots \quad \phi((L-1)r+\rho)\right]'$$

$$\Phi_T = \begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(r) & \ldots & \phi((2L-1)r) \\ \phi(r) & \phi(0) & \ldots & \phi((2L-2)r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi((2L-1)r) & \phi((2L-2)r) & \ldots & \phi(0) \end{bmatrix}$$

$$\phi(k) = \int_{-\alpha\frac{\pi}{r}}^{\alpha\frac{\pi}{r}} \left|U_0(\omega)\right|^2 \cos(k\omega)\, d\omega$$

O **erro** do interpolador óptimo é dado por:

$$\varepsilon^2 = \sum_{\rho=0}^{r-1} \varepsilon_\rho^2 ,$$

com $$\varepsilon_\rho^2 = \frac{1}{r}\left\{\phi(0) - \sum_{\lambda=-L}^{L-1} h(\lambda r+\rho)\phi(\lambda r+\rho)\right\}$$

Conclusões idênticas para outras entradas de banda limitada.

Propriedades do interpolador óptimo:

- Filtro FIR simétrico (fase linear)
- O interpolador para *r* contém as soluções para *r*/*k*: basta usar cada *k*-ésima amostra da resposta do filtro.
- O erro decresce rapidamente com *L* crescente e cresce com α.

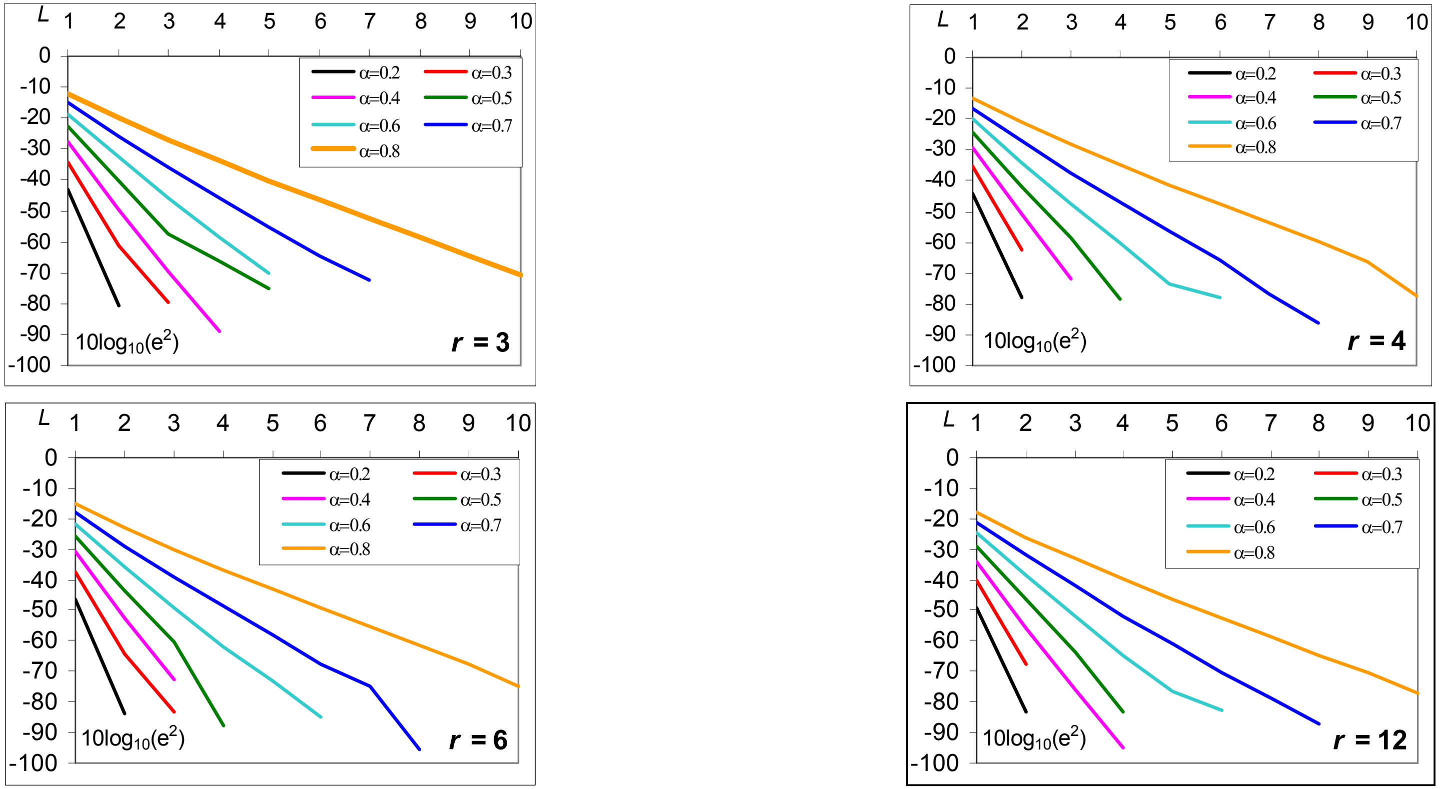


Figura 2.45. Erro do interpolador óptimo em dB para vários valores de L e α (abaixo de –60 dB há instabilidade numérica).

Exemplo:

Projectar um interpolador óptimo para o exemplo anterior com erro inferior a –40dB

Para $r = 3$ e $\alpha = 0.6$ é necessário $L = 2$, logo $N = 13$.

$h(n)$= `[0 -8.745553e-002 -1.066801e-001 -2.220446e-016 3.917741e-001 7.780092e-001 1.000000e+000 7.780092e-001 3.917741e-001 -2.220446e-016 -1.066801e-001 -8.745553e-002 0 ]`

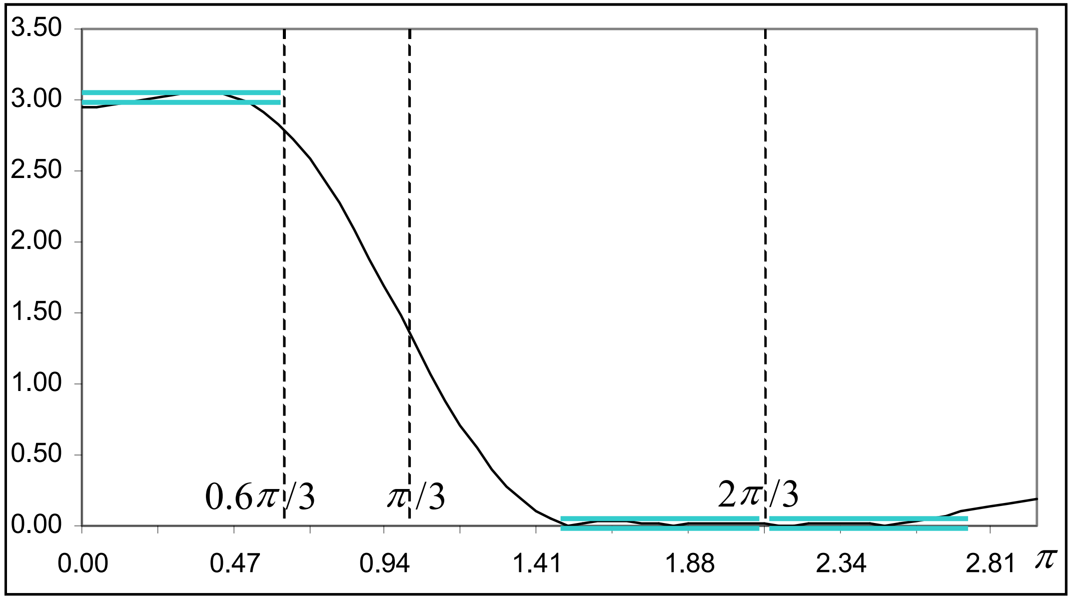


Figura 2.46. Característica do interpolador óptimo para $r = 3$, $L = 2$ e $\alpha = 0.6$.

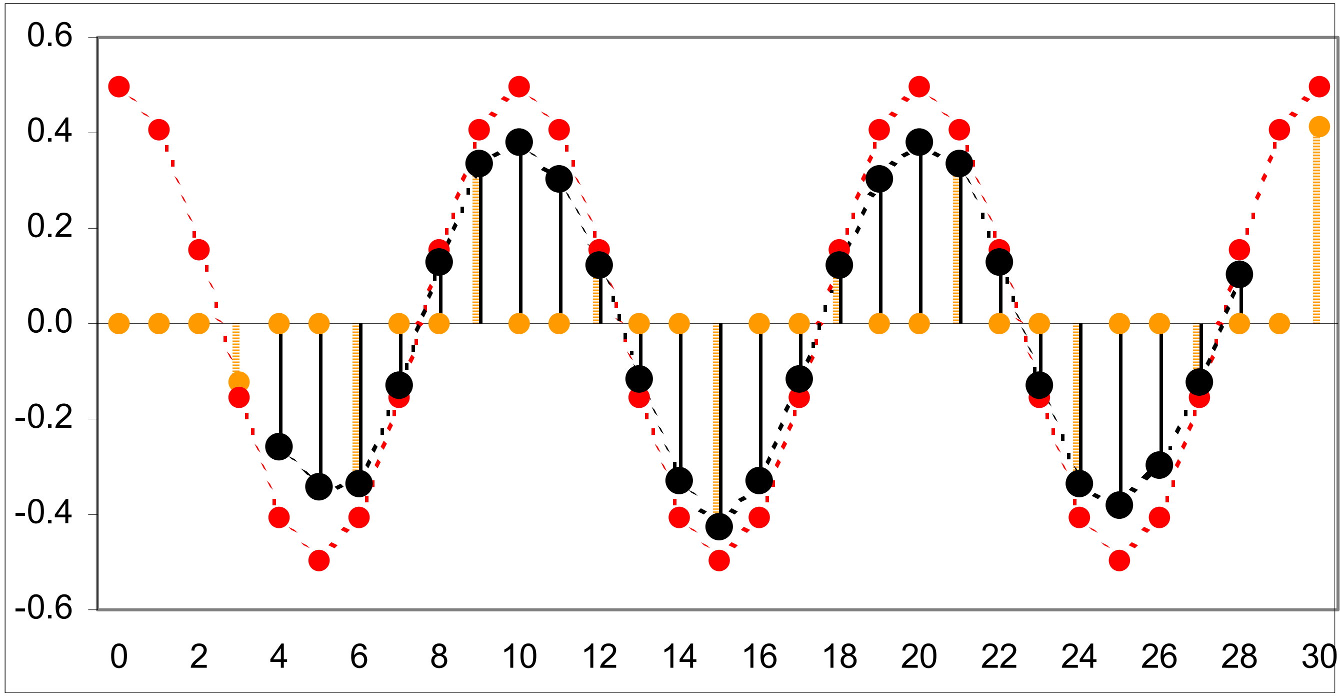


Figura 2.47. Utilização do interpolador óptimo no exemplo de decimação-interpolação anterior. A vermelho, o sinal desejado; a preto, o sinal obtido.

2.5.4 Aplicações de decimação-interpolação

- Mudança de frequência de amostragem
- Filtragem de banda estreita

Exemplos:

a) Filtragem de flutuação de linha-base de ECG

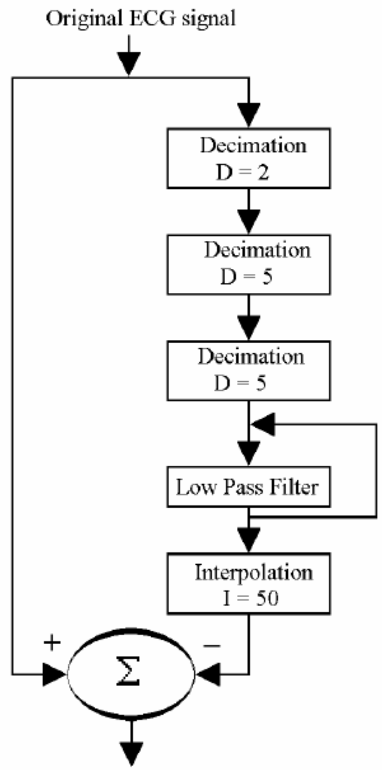
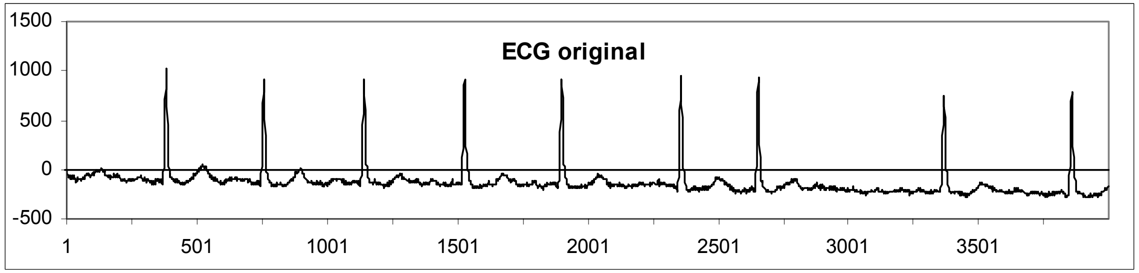


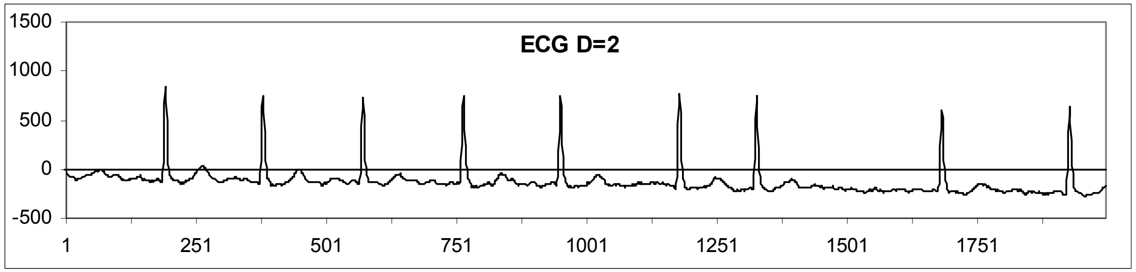
Figura 2.48. Sistema de remoção de flutuação de linha base de ECGs.

Frequentemente podem usar-se filtros simples (p. ex. triangulares).

a) Decimação com filtros triangulares.

Decimação	f_s inicial	D	N	f_s final
1	500 Hz	2	4	250 Hz
2	250 Hz	5	10	50 Hz
3	50 Hz	5	10	10 Hz





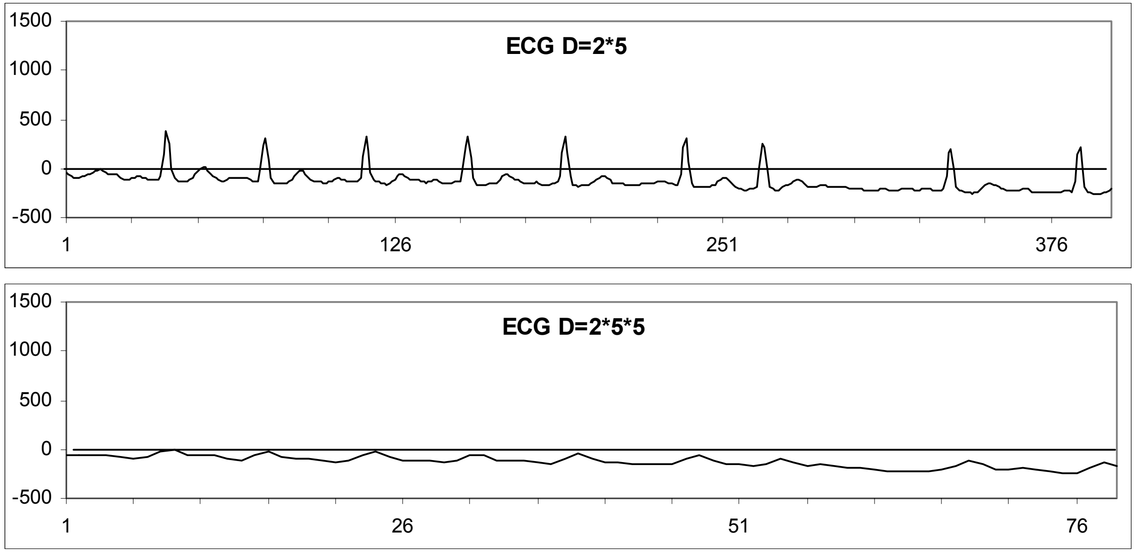


Figura 2.49. Sucessivas decimações de um ECG com filtragem triangular.

b) Extracção da flutuação com filtro triangular de f_c = 2 Hz

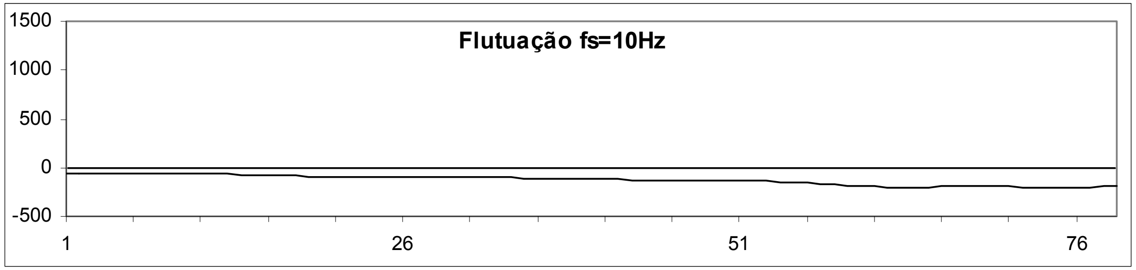
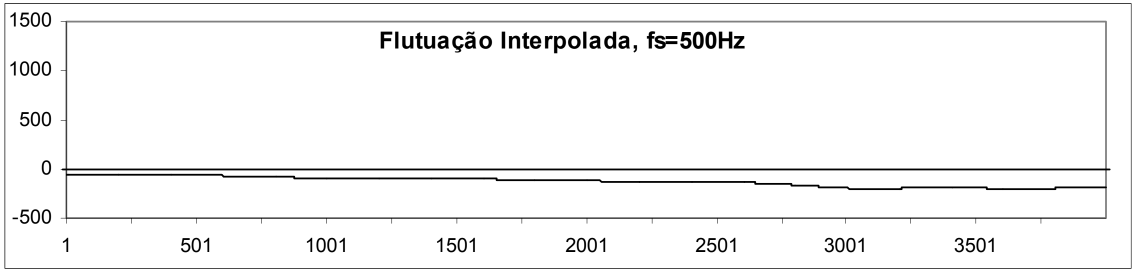


Figura 2.50. Flutuação do ECG anterior obtida por filtragem triangular.

c) Interpolação linear e subtracção da componente de flutuação.



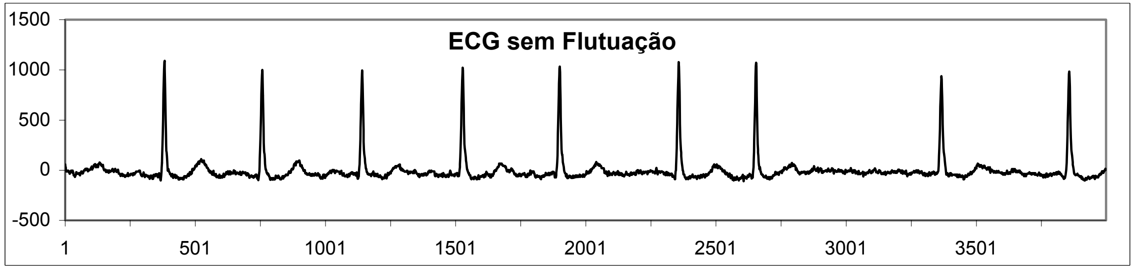
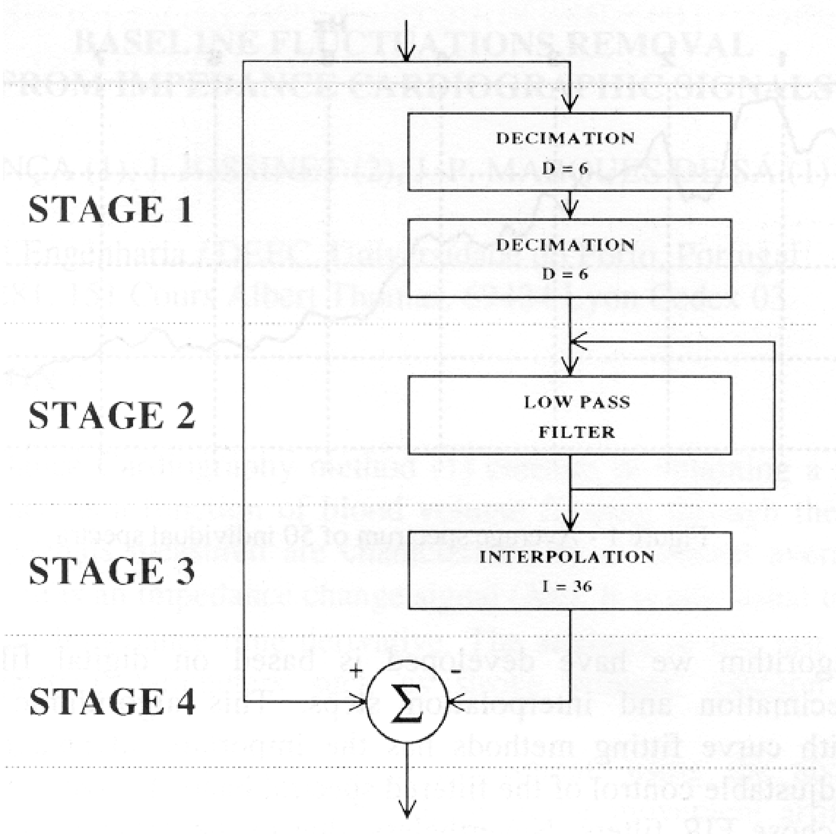


Figura 2.51. Passos finais da obtenção de ECG sem flutuação.

b) Filtragem de flutuação de linha-base de cardiogramas de impedância (ICG)

Sinais ICG amostrados a 250 Hz, com banda útil em [1 125] Hz.



Passo 1: Duas decimações de D = 6, com filtro óptimo de N = 21. Nova frequência de amostragem: f_1=250/36 = 6.9 Hz.

Passo 2: Filtragem LP com filtro óptimo de N=21 da componente de flutuação (f_l=0.5 Hz). Este passo pode ser repetido.

Passo 3: Interpolação de I=36 por aproximação parabólica.

Passo 4: Subtracção da componente de flutuação interpolada.

Figura 2.52. Esquema utilizado na remoção de flutuação de linha-base de ICGs.

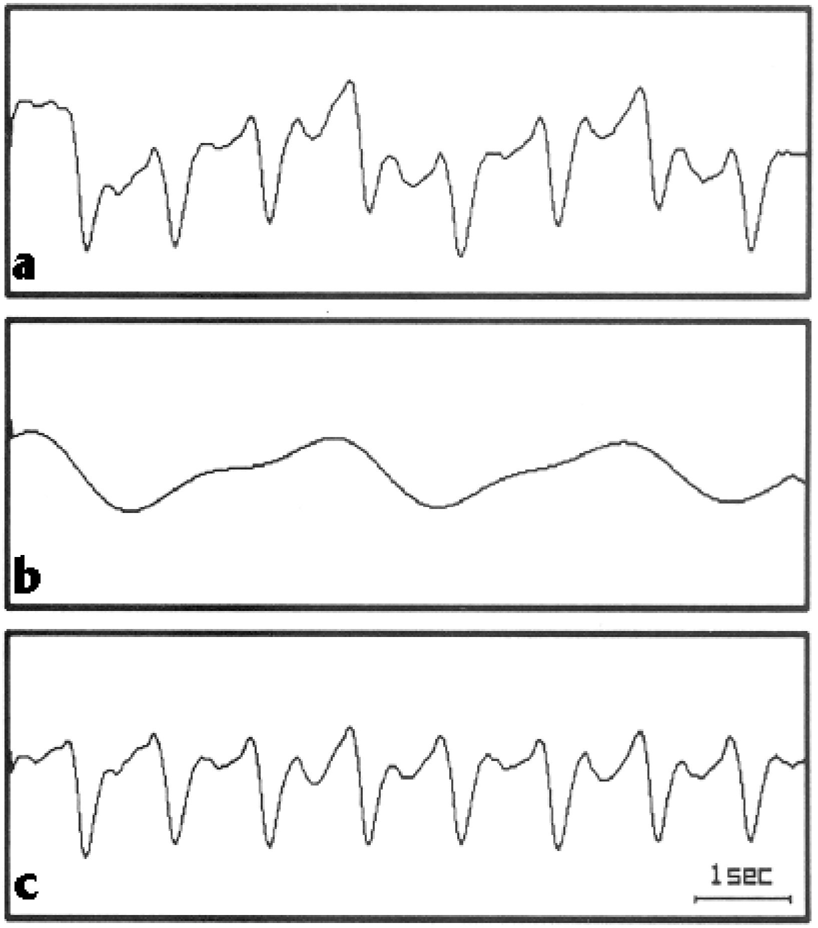


Figura 2.53. a) ICG original; b) Flutuação estimada; c) ICG sem flutuação.

	Atenuação na banda de rejeição (dB)	Atenuação na banda de passagem (dB)	Nº de multiplicações por amostra do esquema	Nº de multiplicações por amostra de filtro óptimo equivalente
Passo 2 simples	38.4	0.45	29.1	756
Passo 2 repetido	43.1	0.02	29.7	1476

2.6 Filtros FIR Adaptativos

2.6.1 Estrutura e Aprendizagem

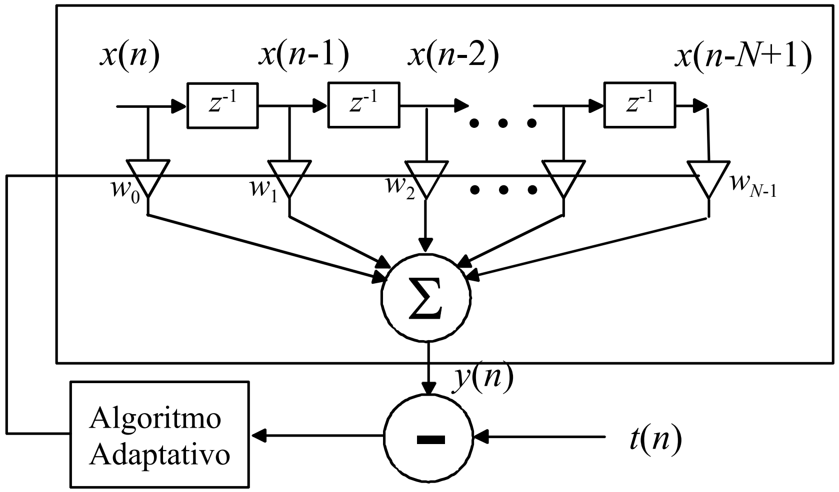


Figura 2.54. Estrutura básica de um filtro FIR adaptativo.

O filtro FIR adaptativo pode ser considerado como um perceptrão linear com:

- $\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & \ldots & x(n-N+1) \end{bmatrix}'$: vector das entradas no instante *n*.
- $\mathbf{w}^{(n)} = \begin{bmatrix} w_0^{(n)} & w_1^{(n)} & \ldots & w_{N-1}^{(n)} \end{bmatrix}'$: vector dos coeficientes do filtro no instante *n*.
- $y(n)$: saída do filtro no instante *n*.
- $t(n)$: resposta desejada do filtro (valor alvo) no instante *n*.

Temos o sinal de erro:

$$e(n) = t(n) - y(n) = t(n) - \mathbf{w}^{(n)}\mathbf{x}(n) \quad \text{e} \qquad E = \sum_{n=0}^{M} e^2(n)$$

Ajustamos iterativamente $\mathbf{w}^{(n)}$ por forma a minimizar *e*(*n*). Usando o MMQ, temos as *equações normais*:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{w}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X'XW'} = \mathbf{X'T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W'} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'T}$$

com **X**, **T** e **W** matrizes das entradas, dos valores alvo e dos coeficientes.
Normalmente não é praticável esta abordagem que exige conhecer todo o sinal, efectuando-se uma optimização pelo método de *descida de gradiente*:

$$\mathbf{w}^{(n+1)} = \mathbf{w}^{(n)} - \eta \frac{\partial e^2(n)}{\partial \mathbf{w}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}^{(n+1)} = \mathbf{w}^{(n)} + 2\eta\, e(n)\mathbf{x}(n)$$

η - factor de adaptação (de aprendizagem)

Mostra-se que:

- A adaptação (convergência) só tem lugar para $\eta < \eta_{\max}$. Uma escolha criteriosa é $\eta = k/(N\,E\left[x^2(n)\right])$, sendo $E\left[x^2(n)\right]$ a energia média do sinal (suposto estacionário) e $k \in [0.1, \quad 0.5]$.
- A convergência para os valores óptimos dos coeficientes é feita com uma constante de tempo $\tau = \dfrac{N+1}{4\eta\,E\left[x^2(n)\right]}$.

O valor inicial dos coeficientes é arbitrário (frequentemente toma-se o valor zero).

2.6.2 Aplicações de Filtros FIR Adaptativos

Questão-chave:

- Como escolher $t(n)$?

2.6.2.1 Equalização adaptativa de canal

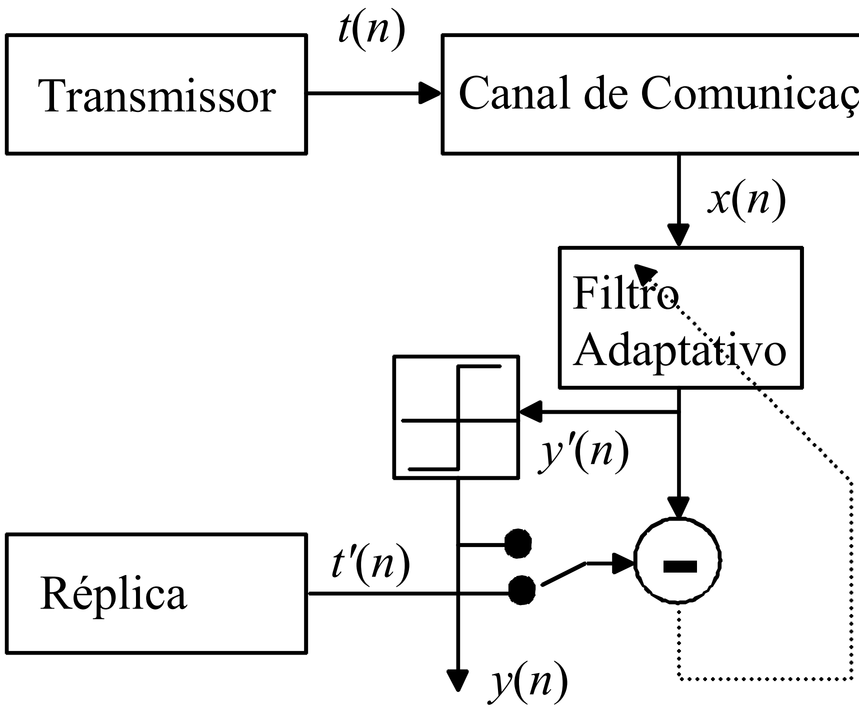


Figura 2.55. Equalização adaptativa de canal: $t(n)$ é um tem de impulsos, distorcido pelo canal de comunicação em $x(n)$.

Duas alternativas simples para a escolha de $t(n)$:

a) Equalizar o canal usando, num período inicial de treino, uma réplica $t'(n)$ de um certo $t(n)$ conhecido.
b) Equalizar o canal usando, continuamente, uma versão limitada da saída.

Exemplo:

$t(n)$: onda quadrada

Canal de comunicação: $\Gamma(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Comprimento do filtro: $N = 10$

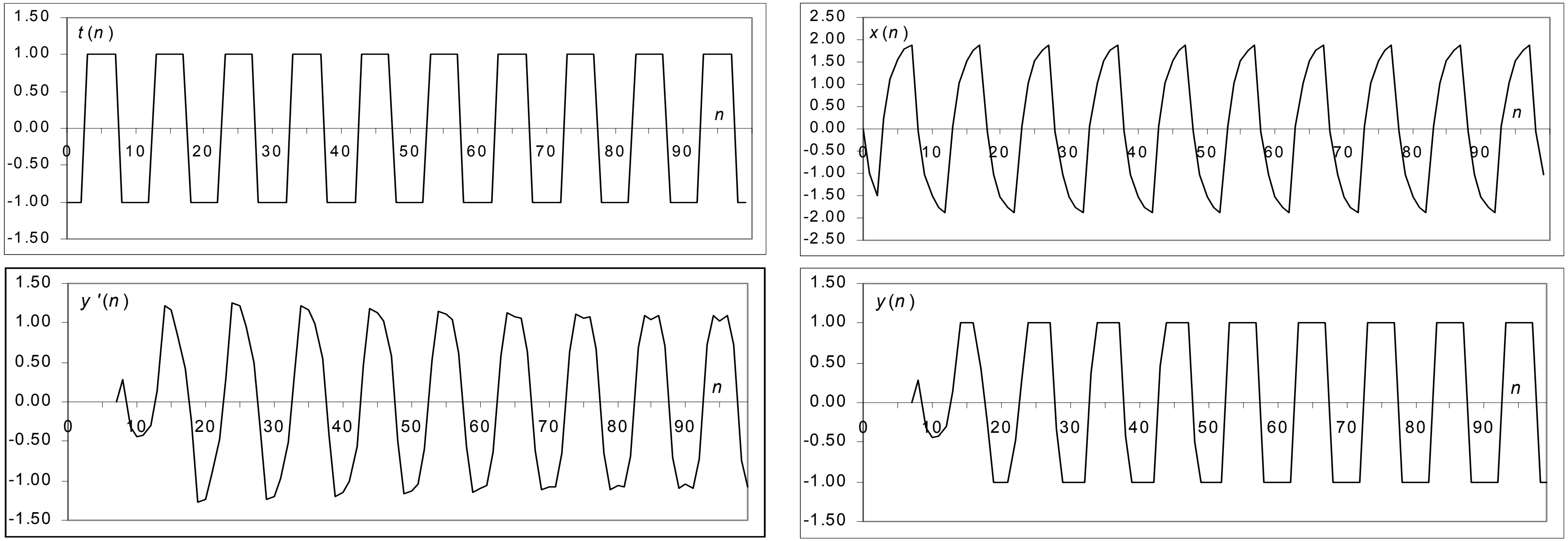


Figura 2.56. Sinais obtidos na experiência de equalização de canal na configuração a) e com $\eta = 0.015$.

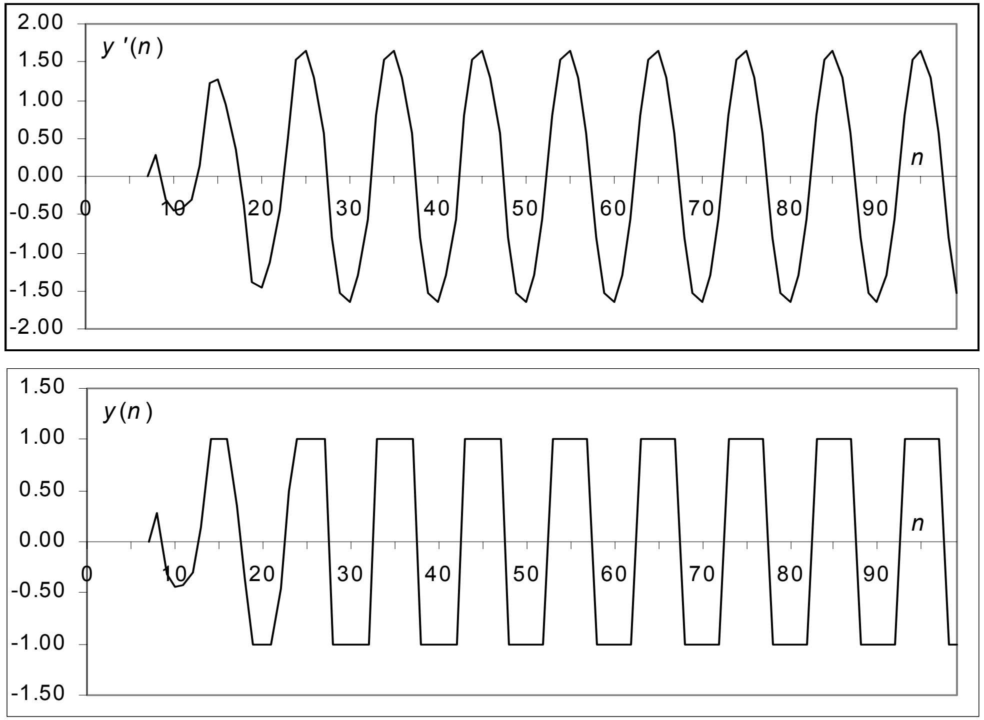


Figura 2.57. Sinais obtidos na experiência de equalização de canal na configuração b), com $y(n)$ resultando de uma limitação em [–0.5, 0.5] e com $\eta = 0.015$.

Note-se que neste exemplo se está a procurar cancelar um pólo usando 10 zeros.

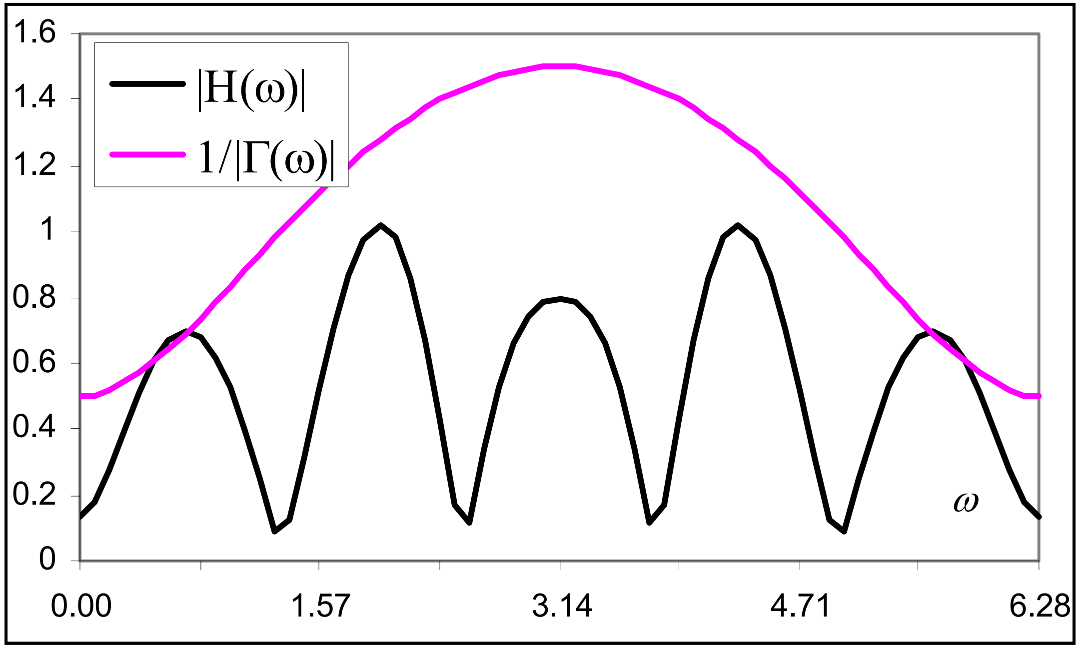


Figura 2.58. Resposta nas frequências do filtro adaptativo, $|H(\omega)|$ e do inverso da resposta do canal, $1/|\Gamma(\omega)|$.

2.6.2.2 Remoção de ruído

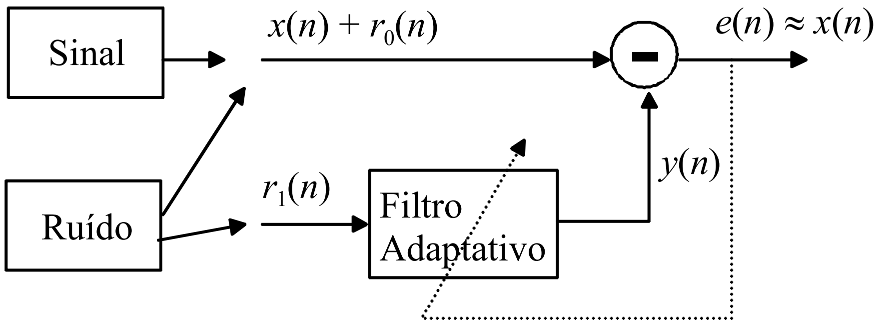


Figura 2.59. Remoção adaptativa de ruído. $r_1(n)$ é uma réplica do ruído verdadeiro $r_0(n)$.

Condições:

a) $x(n)$, $r_0(n)$ e $r_1(n)$ são estacionários.
b) $r_0(n)$ e $r_1(n)$ são de média nula e estão fortemente correlacionados entre si ($r_1(n)$ é uma réplica de $r_0(n)$, fortemente correlacionada).
c) $x(n)$ tem correlação nula com $r_0(n)$ e $r_1(n)$. $x(n) + r_0(n)$ funciona, assim, como o valor alvo que $y(n)$ deverá aproximar.

Temos:

$$E\left[e^2(n)\right] = E\left[(x(n) + r_0(n) - y(n))^2\right] \overset{c)}{=} E\left[x^2(n)\right] + E\left[(r_0(n) - y(n))^2\right]$$

Logo:

$$\min E\left[e^2(n)\right] = E\left[x^2(n)\right] + \min E\left[(r_0(n) - y(n))^2\right] \quad \Rightarrow \quad y(n) \approx r_0(n)$$

$y(n)$ é uma estimativa MMQ de $r_0(n)$.

Exemplos:

a) Remoção do ruído de 50Hz do ECG

Remoção de uma sinusóide: 2 parâmetros a estimar: amplitude e fase.

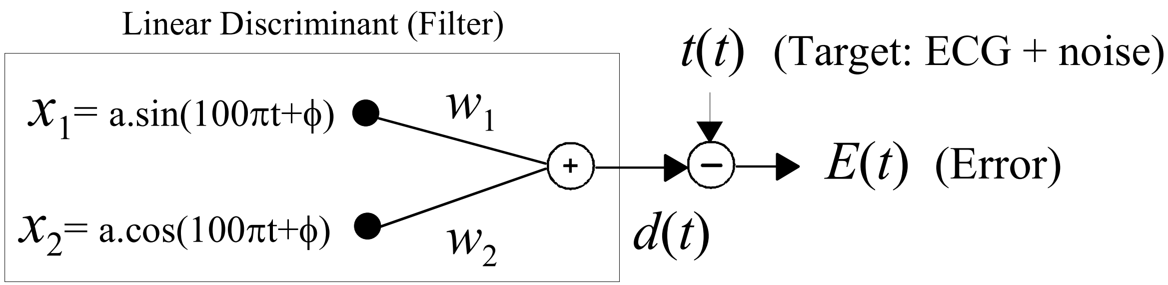


Figura 2.60. Esquema de filtragem adaptativa de uma sinusóide.

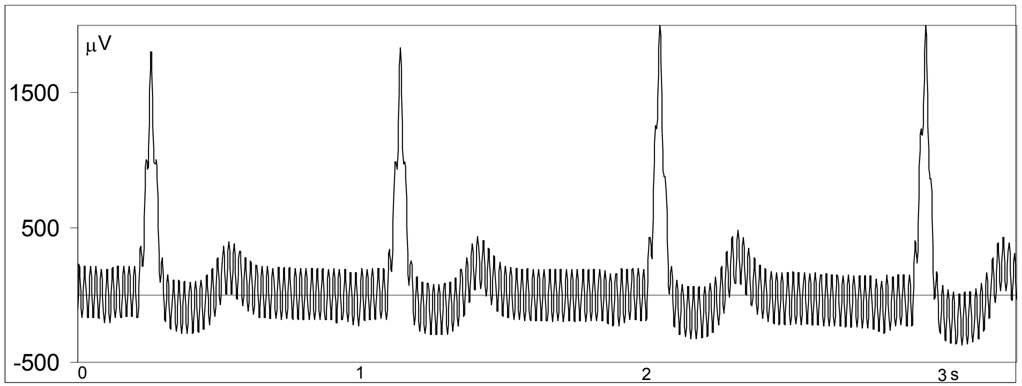


Figura 2.61. ECG (3.4 s) amostrado a 500 Hz, com ruído de 50 Hz. A amplitude é em μV.

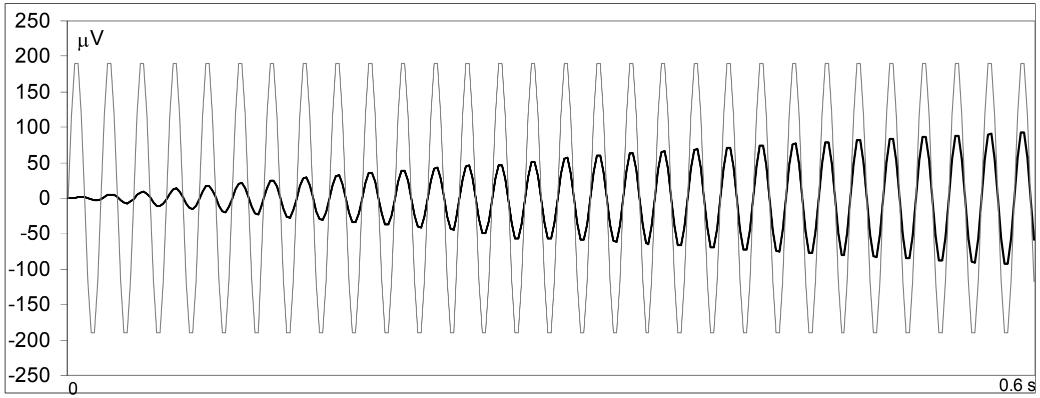


Figura 2.62. Saída do filtro (preto) aproximando o ruído (cinzento) para $\eta = 0.002$. Primeiros 0.6 s.

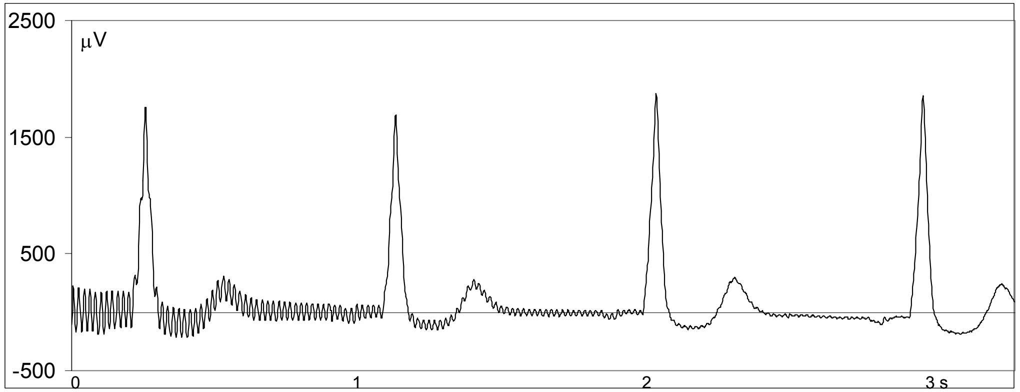


Figura 2.63. ECG filtrado usando o algoritmo LMS com $\eta = 0.002$.

b) Filtragem do ECG fetal contaminado pelo ECG da mãe

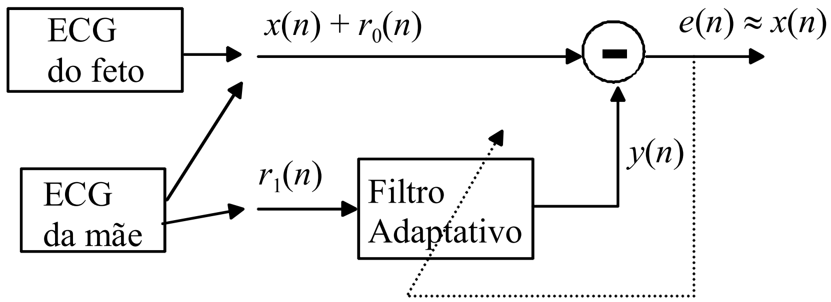


Figura 2.64. Esquema de filtragem adaptativa do ECG fetal para remoção do ECG da mãe.

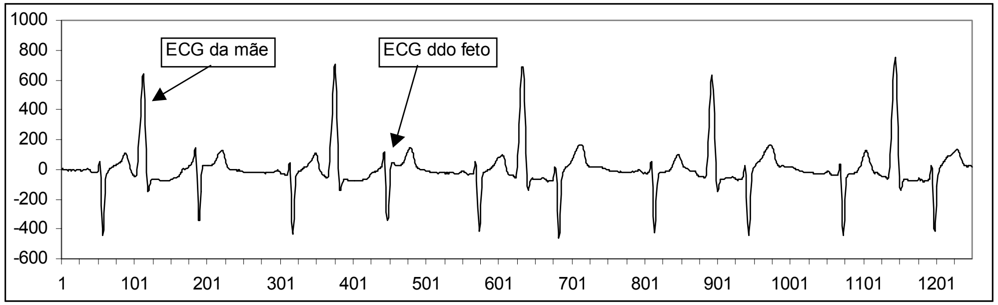


Figura 2.65. ECG do feto com ECG da mãe, amostrado a 500 Hz.

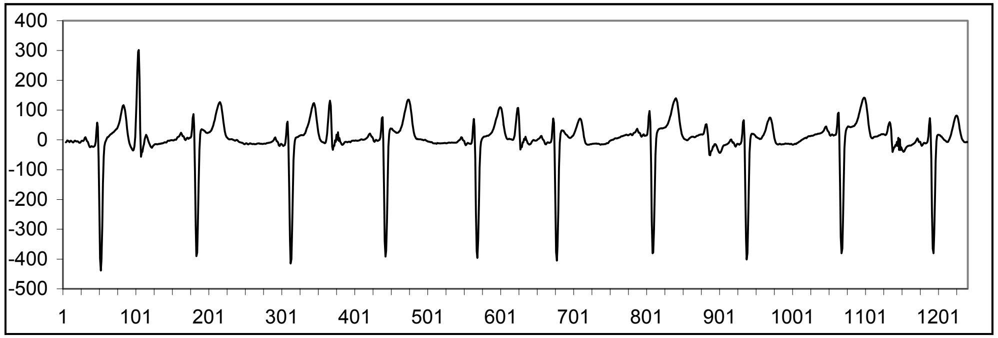


Figura 2.66. Filtragem adaptativa do ECG da mãe usando $N = 10$ e $\eta = 2.5\text{x}10^{-5}$.

2.7 Filtros Não Lineares

Solução de filtragem algumas vezes desejável:

- Atenuação de ruído em zonas "estáveis" do sinal
- Preservação das descontinuidades do sinal

O filtro necessita, assim, de ter um comportamento não linear, como no exemplo seguinte.

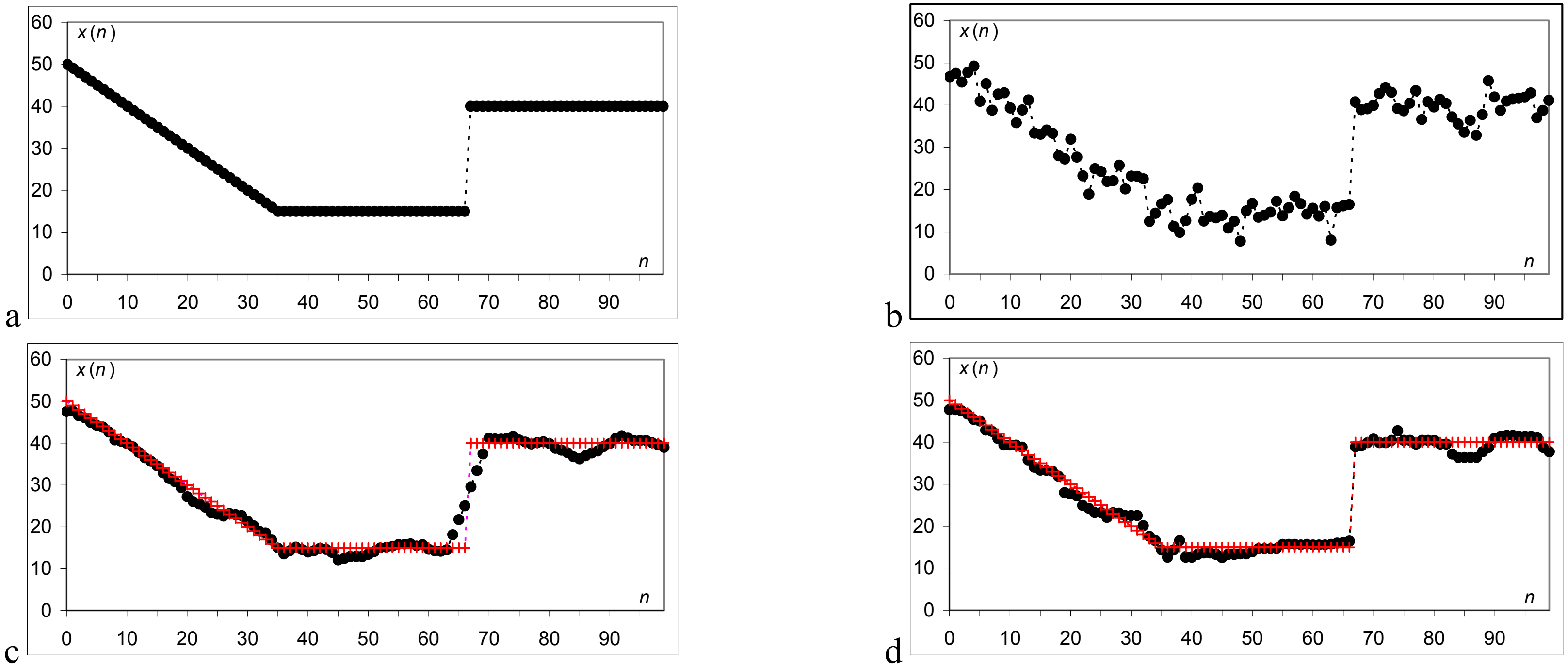


Figura 2.67. a) Sinal original; b) sinal + ruído; c) Filtrado com filtro de média de 7 amostras; d) idem, com filtro de mediana.

Ideia-base:

Uma janela de $2N + 1$ amostras percorre um sinal $x(n)$. A saída é uma operação não linear de ordem N, $O_N(\mathbf{x}(n))$, sobre os valores do sinal dentro da janela, $\mathbf{x}(n)$.

Note-se que, para um filtro não-linear:

$O_N(a\mathbf{x}(n) + b\mathbf{y}(n))$ é, em geral, diferente de $a.O_N(\mathbf{x}(n)) + b\, O_N(\mathbf{y}(n))$

(mostrar, com um exemplo para a operação de mediana)

Assim:

- Quando temos **sinal + ruído** o resultado da filtragem não linear **não** pode ser independentemente avaliado para o sinal e o ruído.

- Como consequência, o conceito de atenuação de potência de ruído não está bem definido, i.e. o tipo de avaliações que fizemos p. ex. nos Exemplos da secção 2.3.4 podem não ter significado.

2.7.1 Filtro de Mediana

$$O_N\,(\mathbf{x}(n)) = \mathrm{med}_N\,(\mathbf{x}(n)) \equiv \mathrm{mediana}_N\,(\mathbf{x}(n))$$

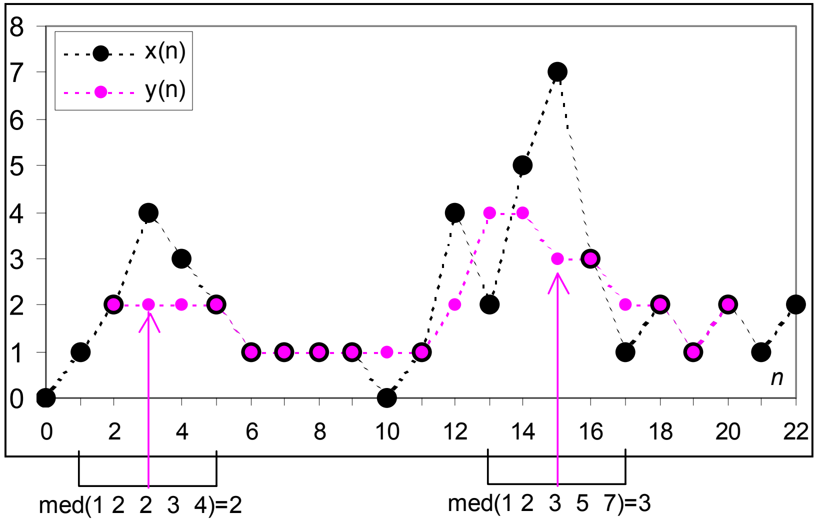


Figura 2.68. Exemplo de filtragem de mediana de ordem $N = 2$.

Definições:

- *Vizinhança constante*: região do sinal com pelo menos $N + 1$ pontos todos do mesmo valor.
- Aresta: subida ou descida monotónica rodeada por vizinhanças constantes.
- Impulso: conjunto de, no máximo, N pontos com valores diferentes das vizinhanças constantes iguais que o rodeiam.
- Oscilação: sequência de pontos que não é nenhuma das configurações anteriores.
- Raiz de ordem N: sinal não alterado pela filtragem de um filtro de mediana de ordem N.

Comportamento do filtro de mediana de ordem *N* (ver Figura):

- Vizinhanças constantes e arestas são preservadas.
- Impulsos são removidos.
- Oscilações são atenuadas.

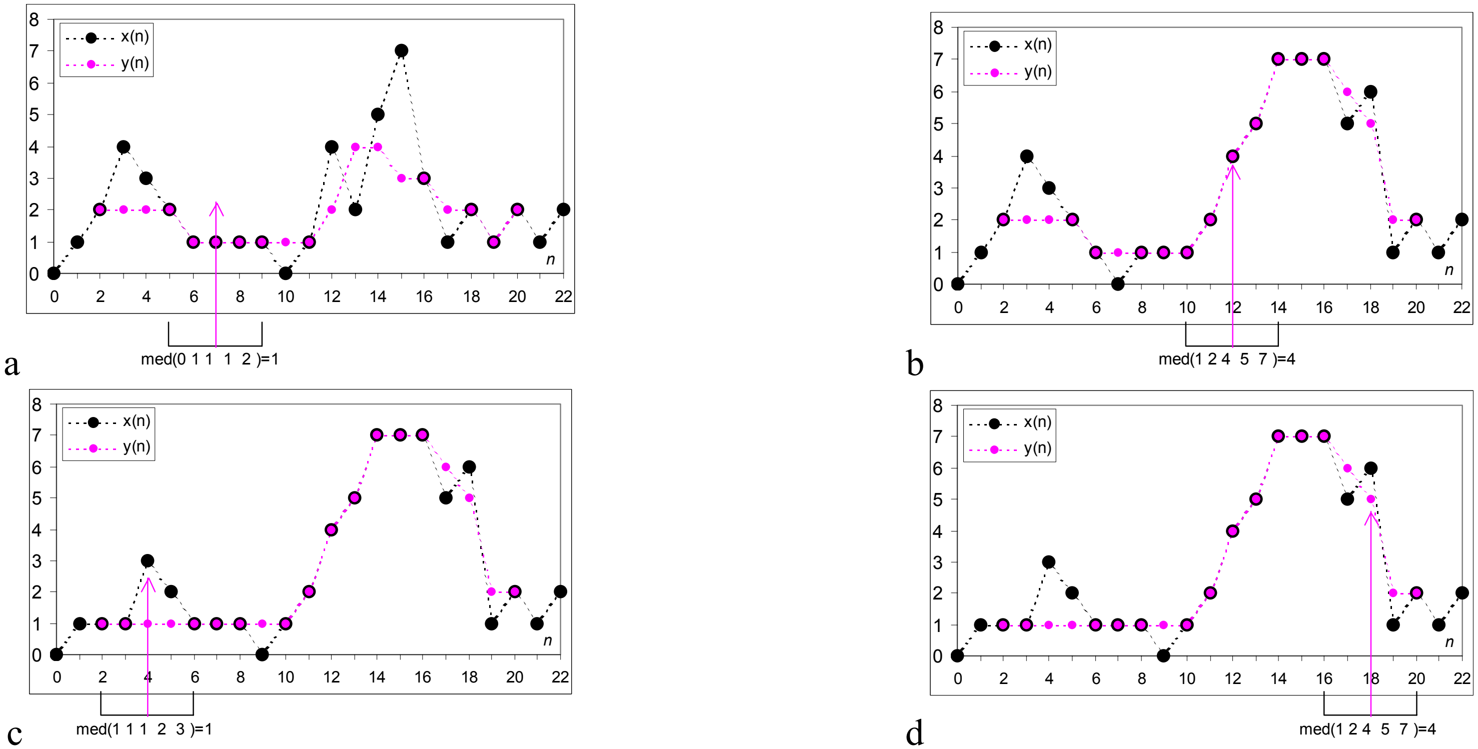


Figura 2.69. Comportamento de um filtro de mediana de ordem 2, para vizinhanças constantes (a), arestas (b), impulsos (c) e oscilações (d).

Note-se que se tivermos um impulso próximo de uma aresta pode haver uma deslocação da aresta ("edge jitter")

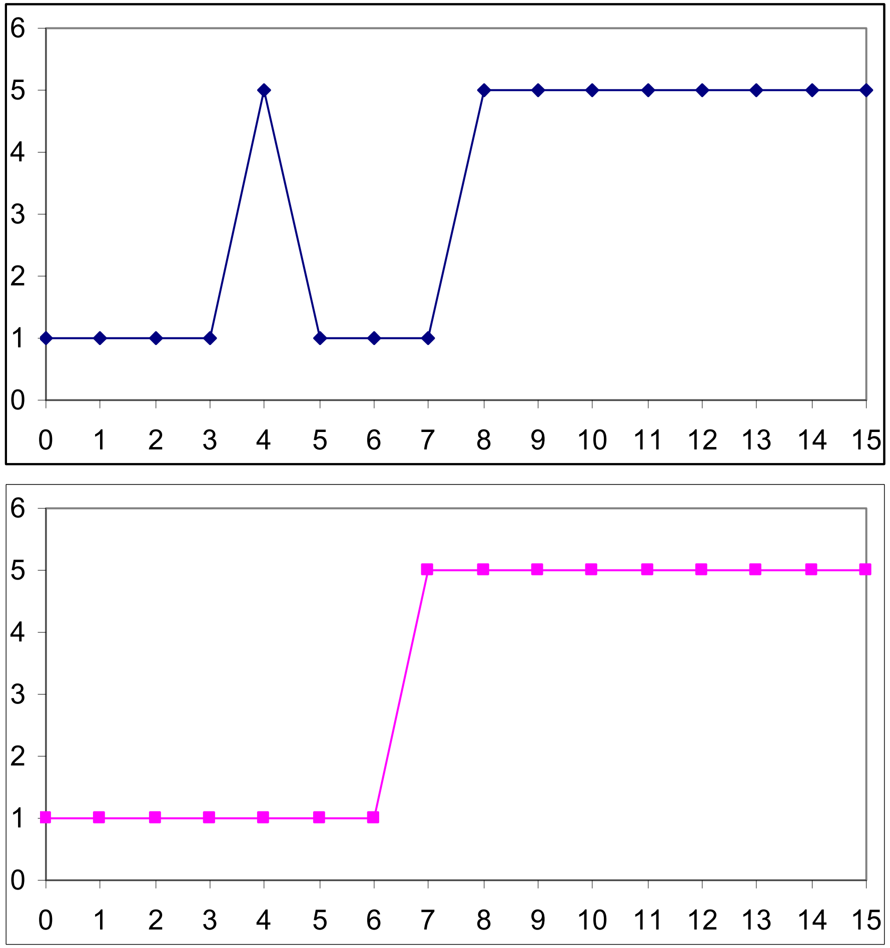
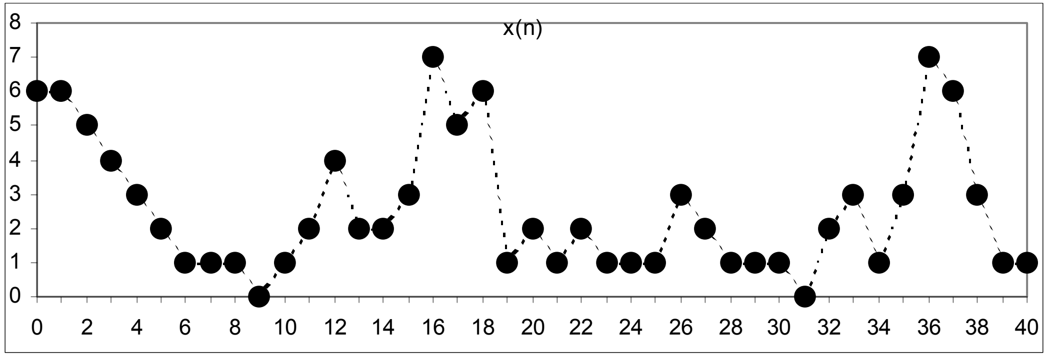
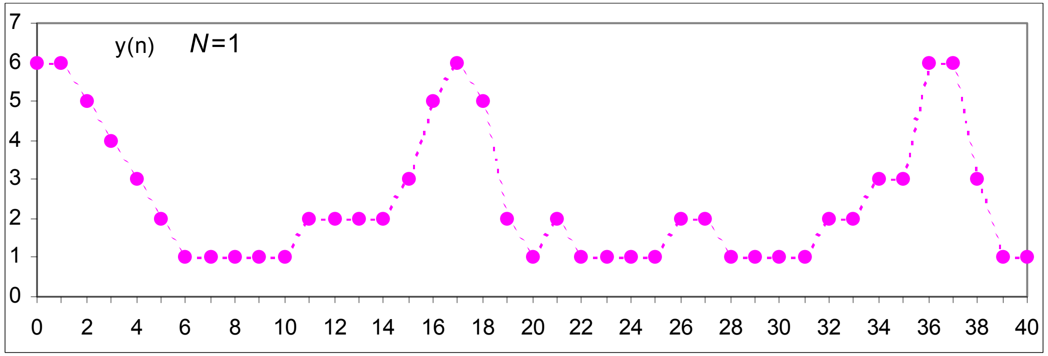


Figura 2.70. Filtragem de um sinal com impulso próximo de aresta com filtro de mediana de ordem *N* = 9. Notar o "edge jitter".

Comportamento para janelas de dimensão crescente:

(extremos do sinal preenchidos com o mesmo valor)





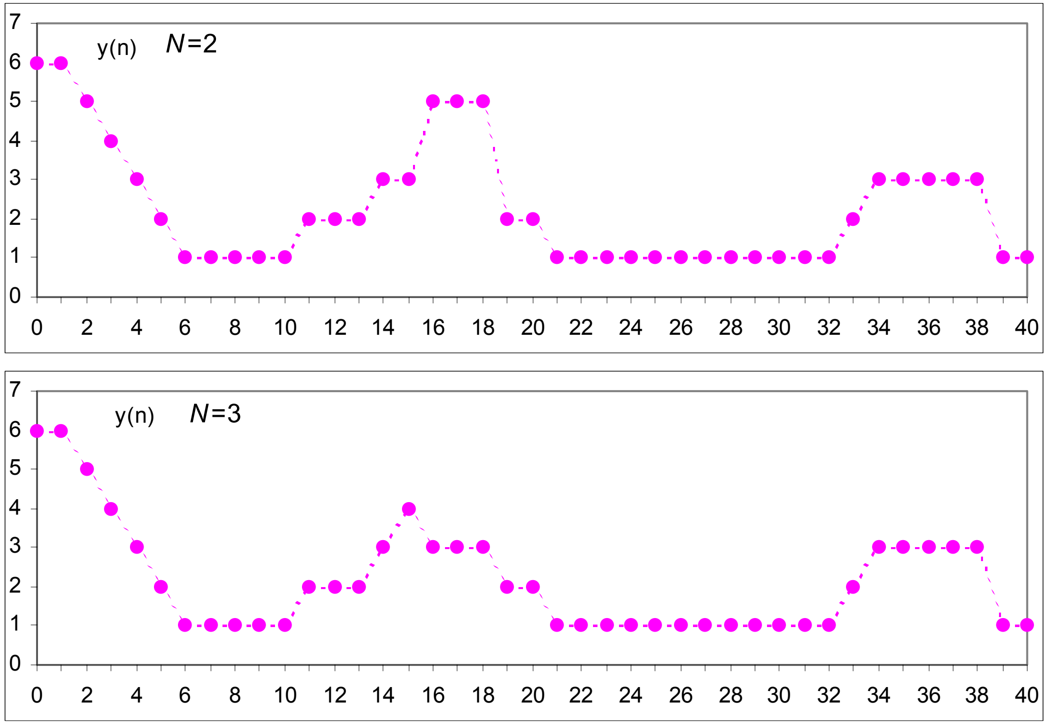
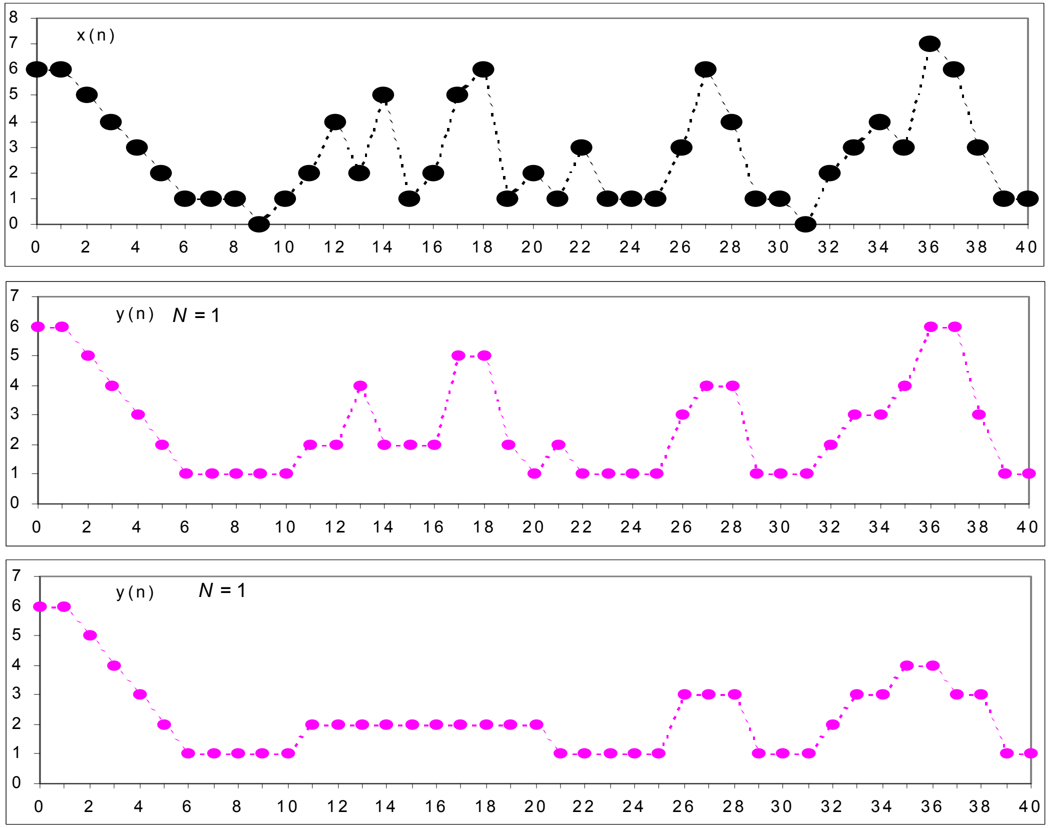


Figura 2.71. Influência da dimensão da janela na filtragem de mediana.

Comportamento para sucessivas passagens de um mesmo filtro:



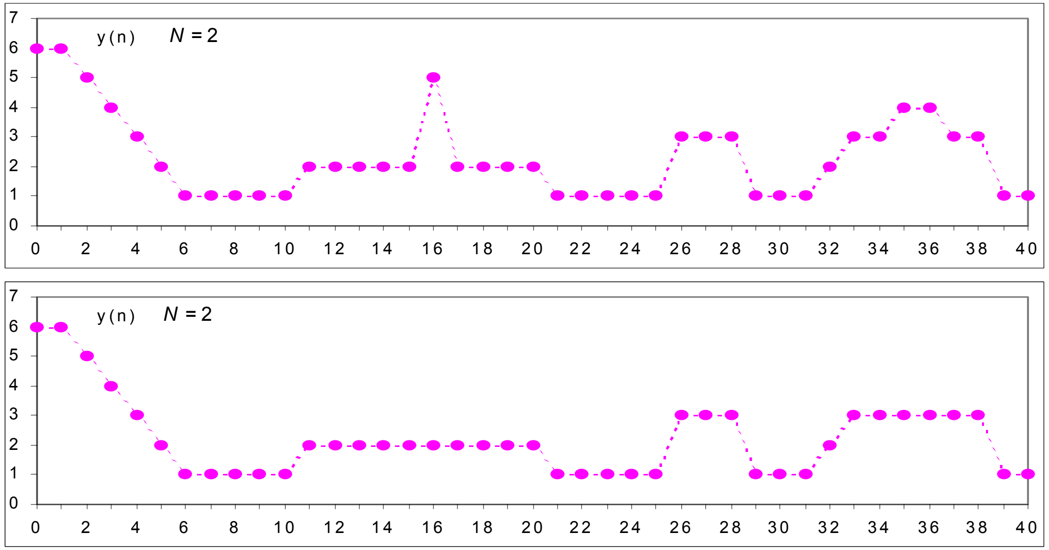


Figura 2.72. Sucessivas passagens para $N = 1$ e $N = 2$ até obter uma raiz.

Mostra-se que:

- Dado um sinal de comprimento L e um certo filtro de mediana, o sinal é reduzido a uma raiz depois de sucessivas filtragens de no máximo $(L - 2)/2$ vezes.

- Qualquer raiz para um filtro de mediana é raiz para um filtro de mediana de menor comprimento.

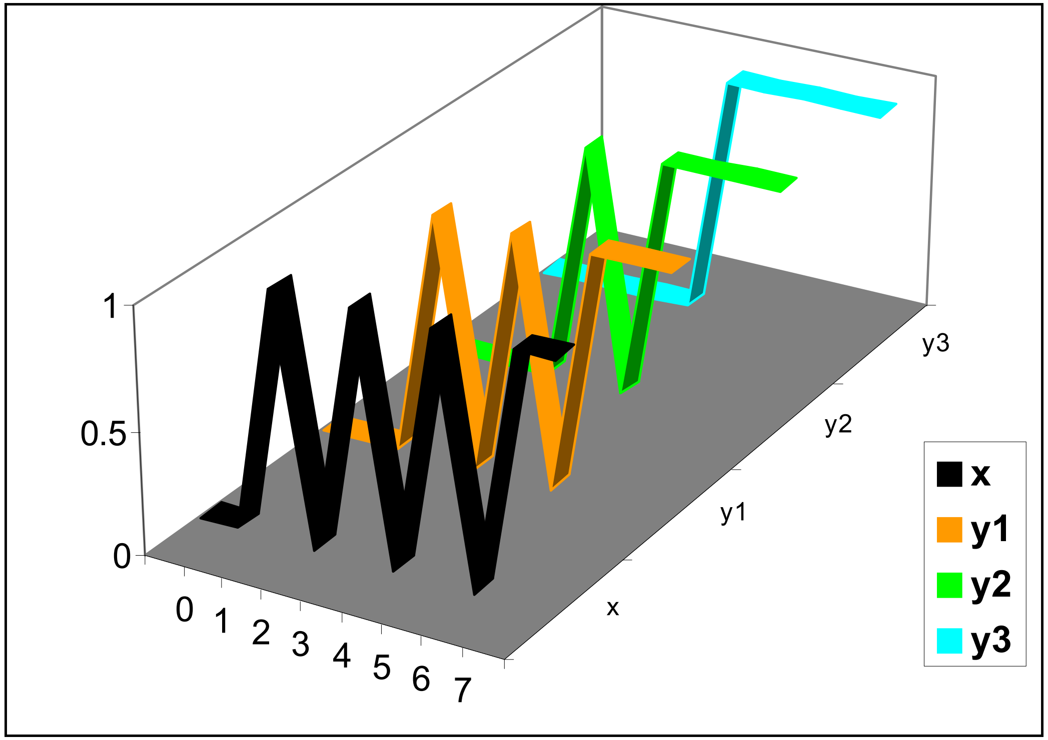


Figura 2.73. Um sinal com *L* = 8 amostras necessitando de 3 passagens com um filtro de mediana de ordem *N* = 1 para atingir uma raiz.

2.7.2 Aplicações do filtro de mediana

a) Obtenção de informação sobre o comportamento em tempo longo.

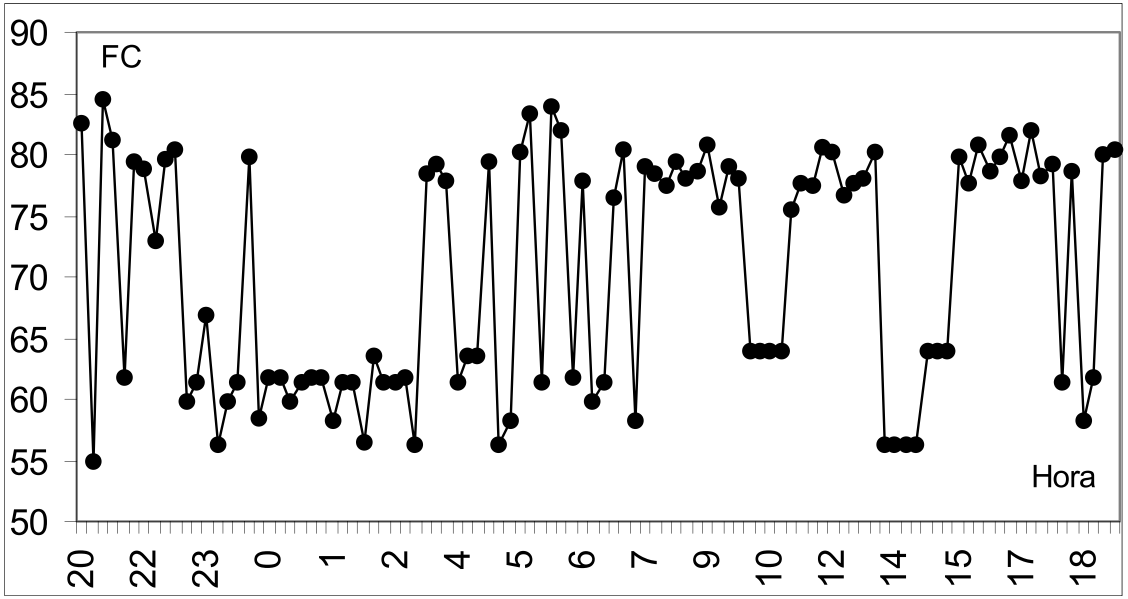


Figura 2.74. Evolução diária do ritmo cardíaco.

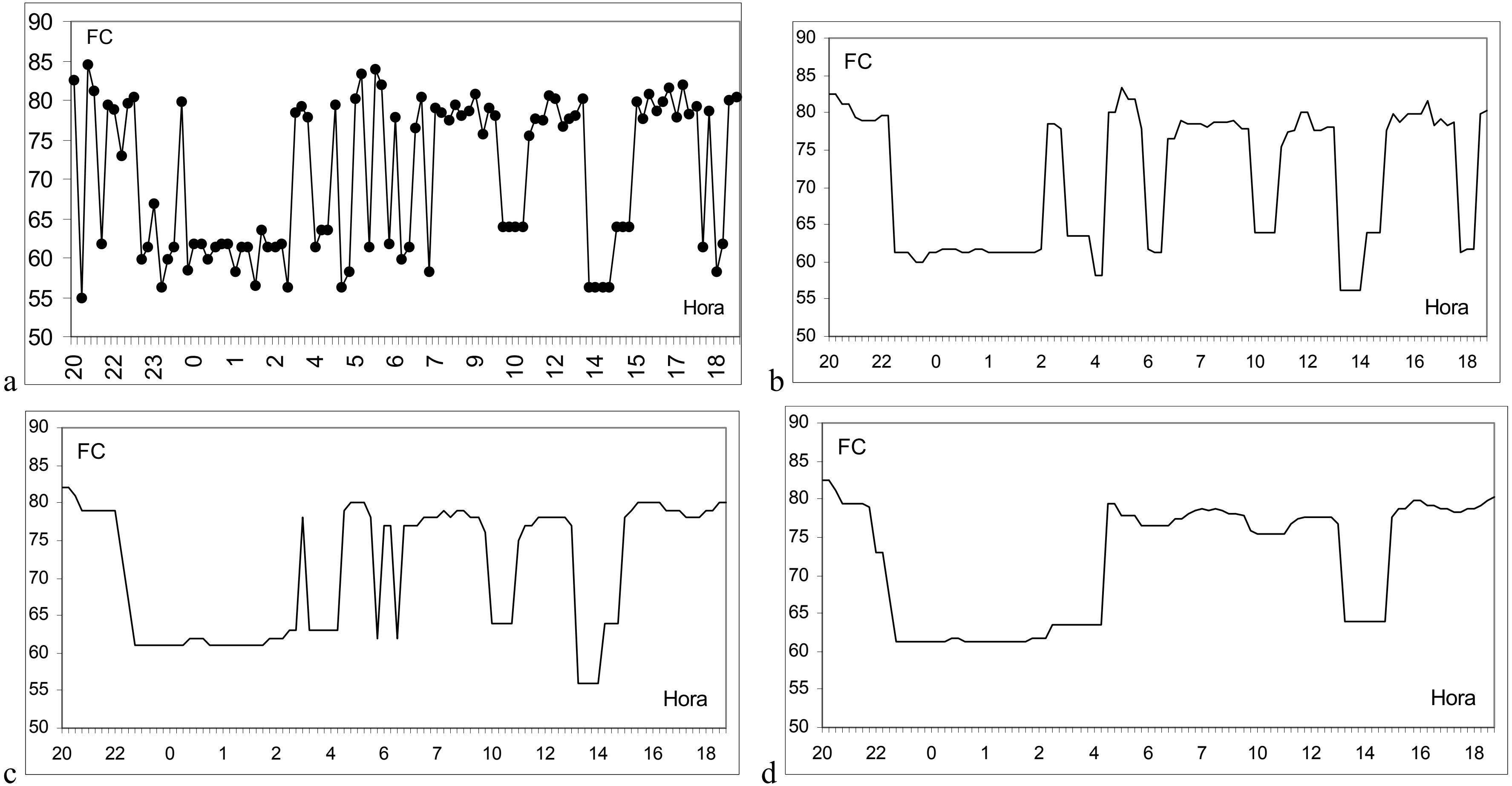


Figura 2.75. Ritmo cardíaco filtrado por mediana, com ordem $N = 1$ (b), $N = 3$ (c) e $N = 4$ (d).

b) Remoção de *spikes*.

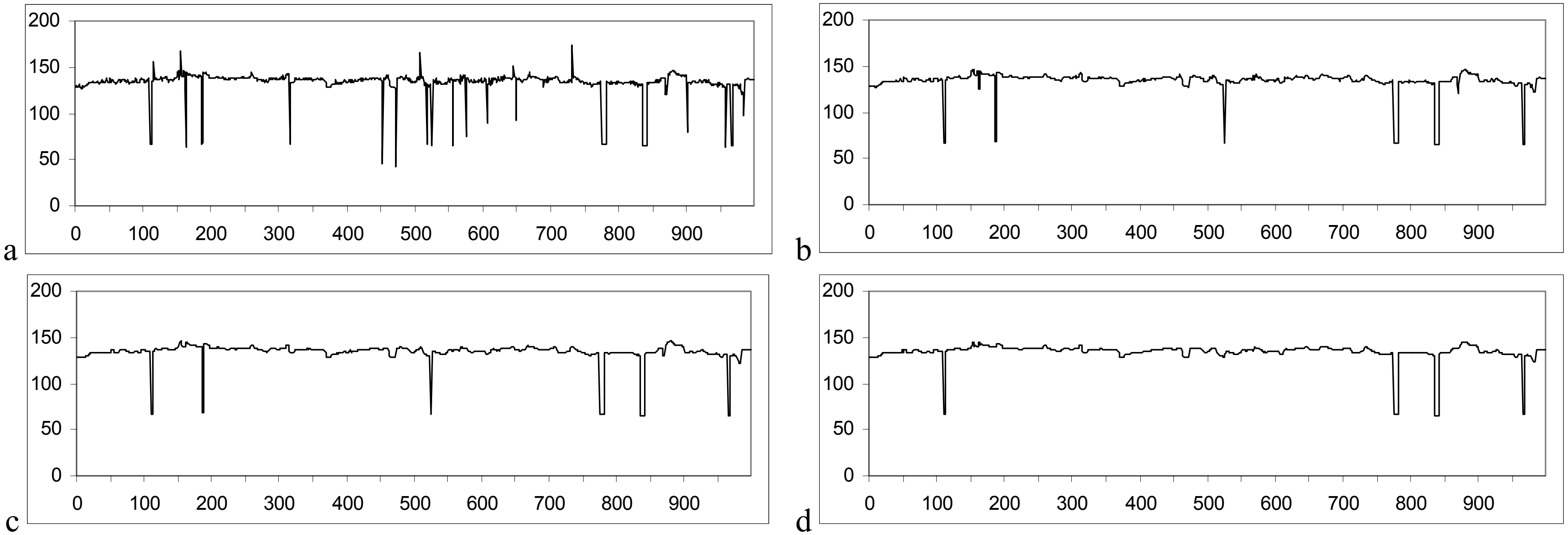


Figura 2.76. Sinal FHR (Fetal Heart Rate) original (a) e sinal com remoção de spikes, filtrado por fioltro de mediana com *N* = 1, 2 e 3 (resp. b, c e d).

2.7.3 Introdução aos Filtros de Pilha ("Stack Filters")

Ideia-chave: efectuar as operações não-lineares em representações binárias dos sinais.

Exemplo para a operação de mediana.

Seja o sinal:	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0

Para determinar a mediana numa janela de comprimento $2N + 1 = 5$ basta contar o número de 1s; se excede N a mediana é 1, se não é 0.
Logo, o resultado é:

0	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Seja agora um sinal com M níveis de quantificação, i.e., tomando valor em $[0, M-1]$.
Vamos agora considerar "fatias" binárias do sinal conforme o valor está acima (1) ou abaixo (0) de um certo limiar $j \in [1, M-1]$. Cada "fatia" é um sinal binário $x^{(j)}(i)$ obtido pela seguinte *função de decomposição por limiar*:

$$x^{(j)}(i) = \begin{cases} 1 & x(i) \geq j \\ 0 & x(i) < j \end{cases}$$

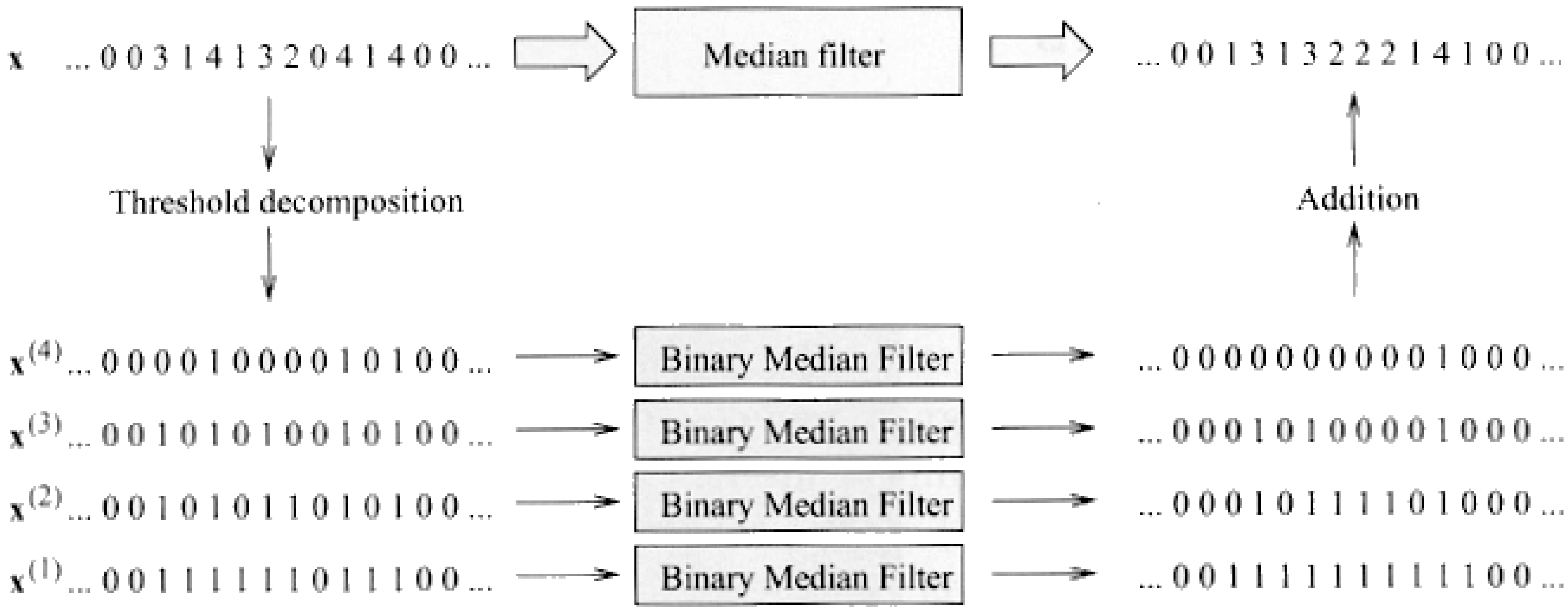


Figura 2.77. Filtragem de mediana usando decomposição por limiar (adaptado de Astola J, Kuosmanen P, 1997).

Notar que:

- A soma de todas as fatias é o sinal original: $x(i) = \sum_{j=1}^{M-1} x^{(j)}(i)$
- Adicionando as filtragens de mediana das "fatias" obtém-se a filtragem de mediana do sinal original.

Os "filtros de pilha" são uma generalização desta ideia.

Considere-se a seguinte relação de ordem parcial de 2 vectores binários:

$$\mathbf{x} \le \mathbf{y} \qquad \text{sse} \qquad x_n \le y_n \ \forall\ n$$

As "fatias" obedecem a esta relação de ordem parcial:

$$\mathbf{x}^{(i)} \le \mathbf{x}^{(j)} \qquad \text{para} \quad i \ge j$$

Consideremos uma função Booleana $f()$ sobre os bits de $\mathbf{x}$. Diz-se que a função Booleana satisfaz a *propriedade de empilhamento* se:

$$f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{y}) \qquad \text{para} \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{y}$$

Filtros construídos com tais funções dizem-se *filtros de pilha*.
Uma *função Booleana positiva*, i.e., que se pode exprimir apenas por variáveis não complementadas, satisfaz a propriedade de empilhamento. O filtro de pilha baseado na função Booleana positiva $f()$ é expresso por:

$$\text{Stack}(\mathbf{x}; f) = \sum_{m=1}^{M-1} f(\mathbf{x}^{(m)})$$

Uma função Booleana positiva de N variáveis pode exprimir-se sob a forma de *mínima soma-de-produtos*:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{k} \prod_{j \in P_i} x_j \ ,$$

onde os P_i são subconjuntos de $\{1, 2, ..., N\}$.
É possível mostrar que, em vez da operação de decomposição, podemos também exprimir o filtro de pilha da seguinte forma:

$$\text{Stack}(\mathbf{x}; f) = \max\left\{\min\left\{x_j : j \in P_1\right\}, \min\left\{x_j : j \in P_2\right\}, \ldots, \min\left\{x_j : j \in P_k\right\}\right\}$$

Exemplo:
a)
A operação de mediana de três amostras pode exprimir-se pela função Booleana positiva $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1\, x_3 + x_2\, x_3$. Logo:

$$\text{med}(x_1, x_2, x_3) = \max\{\min\{x_1, x_2\}, \min\{x_1, x_3\}, \min\{x_2, x_3\}\}$$

b)
Considere-se a seguinte função Booleana positiva:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = x_1 x_2 + x_2\, x_3\, x_4 + x_3\, x_4\, x_5 + x_4\, x_5\, x_6 + x_6\, x_7$$

O respectivo filtro de pilha pode ser implementado como (ver Figura 2.78):

$$\text{Stack}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \max\{\min\{x_1, x_2\}, \min\{x_2, x_3, x_4\}, \min\{x_3, x_4, x_5\}, \min\{x_4, x_5, x_6\} + \min\{x_6, x_7\}\}$$

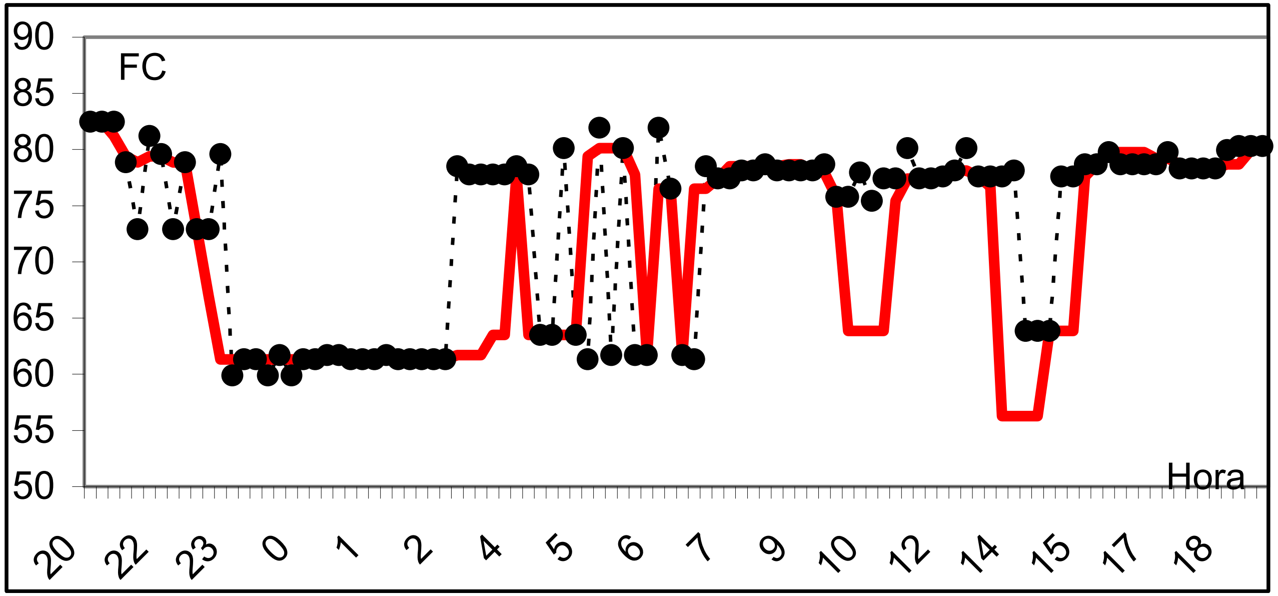


Figura 2.78. Sinal do Exemplo 2.72 a) filtrado por mediana de ordem 3 e usando o filtro de pilha acima descrito.

Vantagens dos filtros de pilha:

- Operações de mais fácil implementação e de execução mais rápida (possibilidade de processamento paralelo)
- Possibilidade de realizar operações mais complexas (busca de melhor solução com Redes Neuronais).

2.7.4 Filtros Morfológicos

Seja um sinal $s(n)$: $D \rightarrow V$. Define-se:

Umbra: subconjunto de $E = D_\times V$ dado por

$$U(s) = \{(n, y) \in E; \quad s(n) \geq y\}$$

Intersecção de umbras de funções com o mesmo domínio D:

$$U(f \cap g) = U(\min\{f(n), g(n)\}), \quad n \in D$$

Reunião de umbras de funções com o mesmo domínio D:

$$U(f \cup g) = U(\max\{f(n), g(n)\}), \quad n \in D$$

Translação de umbra: $\quad U_k(s) = U(s(n-k)); \quad n \in D$

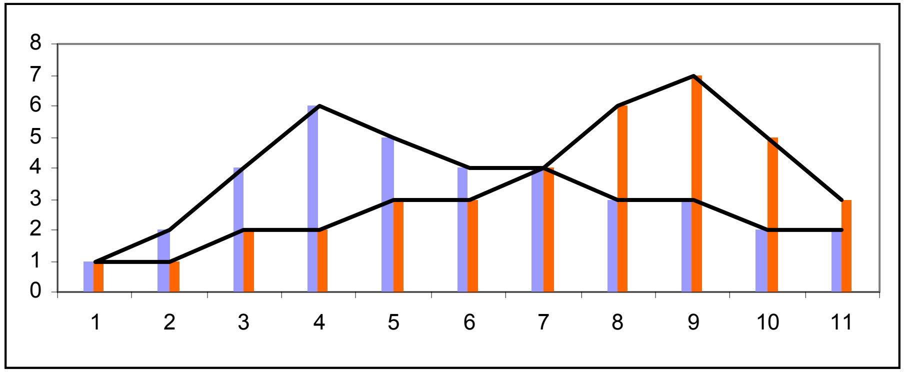


Figura 2.79. Operações com umbras de sinais.

Seja uma janela: $w = [-N,\ N]$. Definem-se as *operações morfológicas*:

- *Erosão*: $U(s \circ w) = \bigcap_{k \in w} U_k(s) = \min(s(n-k), ..., s(n-k))$
- *Dilatação*: $U(s \bullet w) = \bigcup_{k \in w} U_k(s) = \max(s(n-k), ..., s(n-k))$
- Abertura (erosão seguida de dilatação): $U((s \circ w) \bullet w)$
- Fecho (dilatação seguida de erosão): $U((s \bullet w) \circ w)$

(Notar a semelhança destas operações com a do filtro de pilha. De facto os filtros morfológicos são casos particulares dos chamados filtros de pilha generalizados.)

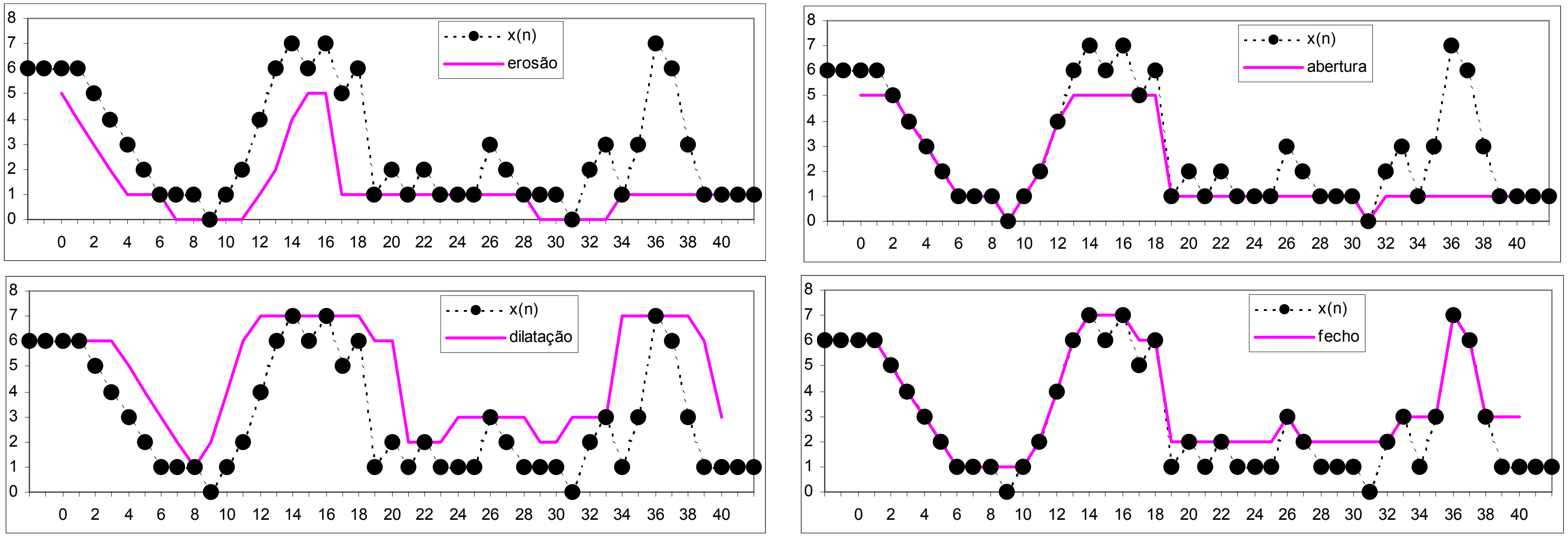


Figura 2.80. Ilustração de operações morfológicas em sinais.

- Erosão: reduz os picos e alarga os vales
- Dilatação: sobe os vales e alarga os picos
- Abertura: suaviza a aprte superior do gráfico por cortar os picos
- Fecho: suaviza a parte superior do gráfico por preencher os vales

2.7.5 Aplicações de filtros morfológicos

Remoção de *spikes* unipolares.

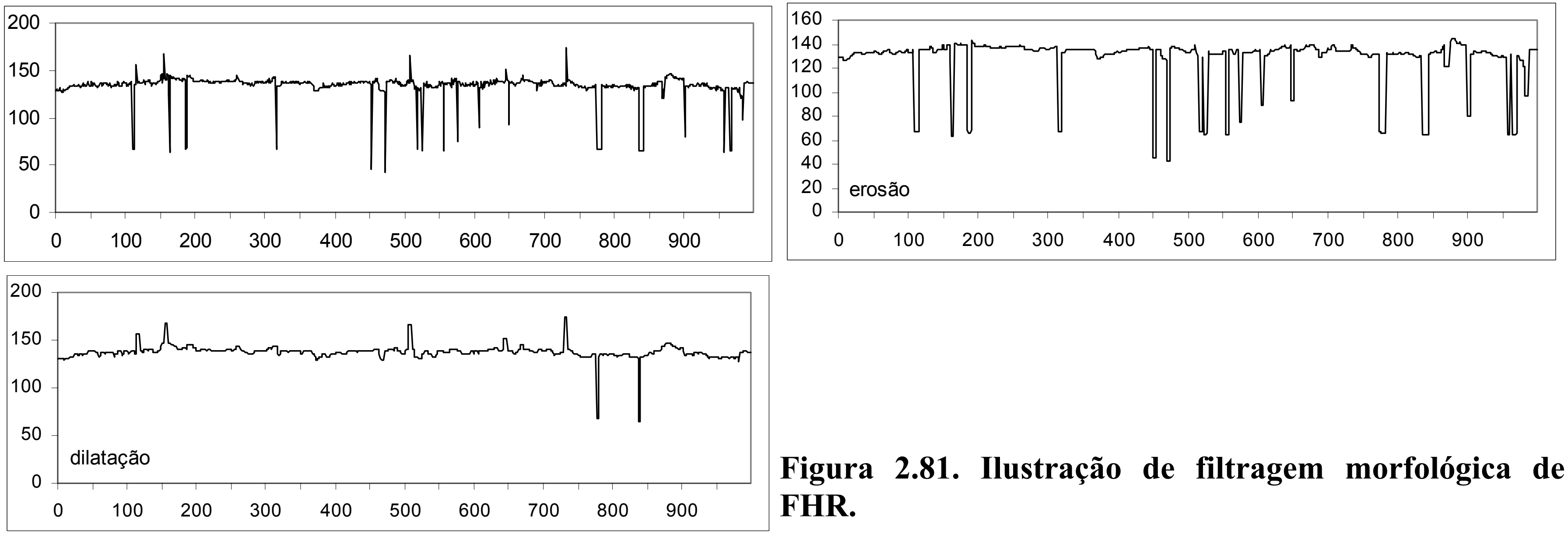


Figura 2.81. Ilustração de filtragem morfológica de FHR.

Bibliografia

Astola J, Kuosmanen P (1997) Fundamentals of Nonlinear Digital Filtering. CRC Press

Cappellini V, Constantinides A, Emiliani P (1978) Digital Filters and Their Applications. Academic Press Pub. Co.

Crochiere RE, Rabiner LR (1981) Interpolation and Decimation of Digital Systems. Proc. IEEE, 3:300-331.

Gallagher NC, Wise GL (1981) A Theoretical Analysis of the Properties of Median Filters. IEEE Tr ASSP, 29:1136-1141.

Jackson LB, (1986) Digital Filters and Signal Processing. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Kuc R (1988) Introduction to Digital Signal Processing. Mc Graw-Hill, Inc.

Lyons RG (1997) Understanding Digital Signal Processing. Addison Wesley Longman, Inc.

Oetken G, Parks TW, Schüssler HW (1975) New Results in the Design of Digital Interpolators. IEEE Tr. ASSP, 23:301-309.

Oppenheim AV, Schafer RW, Buck JR (1999) Discrete-Time Signal Processing. Prentice-Hall Inc.

Proakis JG, Manolakis DG (1996) Digital Signal Processiong. Principles, Algorithms and Applications. Prentice Hall Int., Inc.

Spriet J, Bens J (1979) Optimal Design and Comparison of Wide-Band Digital On-Line Differentiators. IEEE Tr ASSP 27:46-52.

Widrow B, Glover Jr JR, McCool JM, Kaunitz J, Williams CS, Hearn RH, Zeidler JR, Dong Jr E, Goodlin RC (1975) Adaptive Noise Cancelling: Principles and Applications. Proc. IEEE, 63:1692-1716.

Widrow B, McCool JM, Larimore MG, Johnson Jr CR (1976) Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter. Proc. IEEE, 64:1151-1162.