# Processamento de Sinal

## Conceitos, Métodos e Aplicações

**Texto Tutorial da Disciplina:**
**APSI - LEEC**

J.P. Marques de Sá – jmsa@fe.up.pt
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

# Índice

# 4.3 Descrições Tempo-Frequência

### 4.3.1 Motivação

$$x(t) \quad \Leftrightarrow \quad T_x(t, f)$$

Análise de sinais determinísticos variantes no tempo ou estocásticos não-estacionários.

Duas classes de métodos:

- Linear

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad \Rightarrow \quad T_x(t, f) = aT_{x_1}(t, f) + bT_{x_2}(t, f)$$

Exemplos:

Transformada de Fourier variante no tempo
Transformada de óndulas
...

- Quadrático

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad \Rightarrow$$

$$T_x(t, f) = |a|^2 T_{x_1}(t, f) + |b|^2 T_{x_2}(t, f) + ab^* T_{x_1 x_2}(t, f) + a^* b T_{x_2 x_1}(t, f)$$

Exemplos:

Transformada de Wigner
...

### 4.3.2 Transformada de Fourier Variante no tempo

Ideia-chave: Multiplicar o sinal por uma janela corrente no tempo.

$$X(n,\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty 1} x(n+m)w(m)e^{-j\lambda m}$$

Temos a versão discreta da Transformada de Fourier variante no tempo, também designada por STFT ("Short Time Fourier Transform"). A representação de STFT é chamada *espectrograma*.

**<u>Exemplo:</u>**

Chirp linear.

$$x(n) = \sin(w_0 n^2)$$

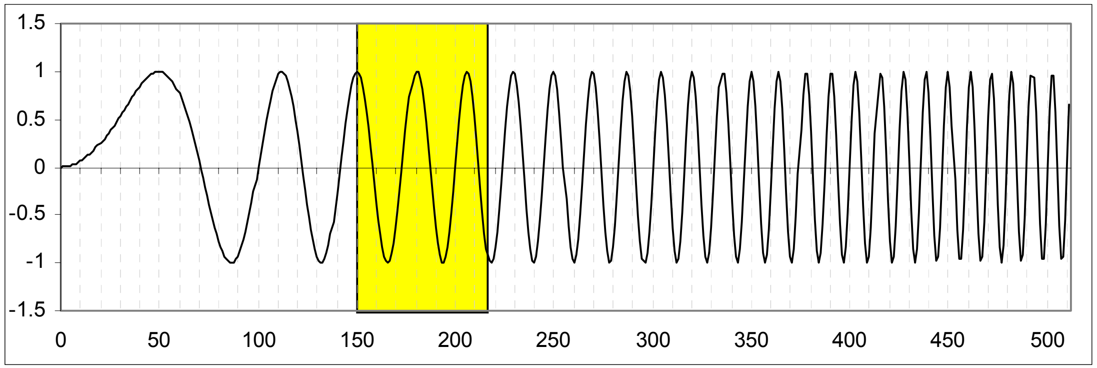



**Figura 4.24. Cirp linear com $f_0 = 0.4\text{x}10^{-3}$ (512 amostras) e uma janela de 64 amostras.**

Frequência instantânea de $\sin(\varphi(n))$: $\dfrac{\partial\varphi(n)}{\partial n} = 2\pi f_0 n = 0.8\pi 10^{-3} n$.

Análise com uma janela de Kaiser de 64 amostras e $\beta = 3.5363$.

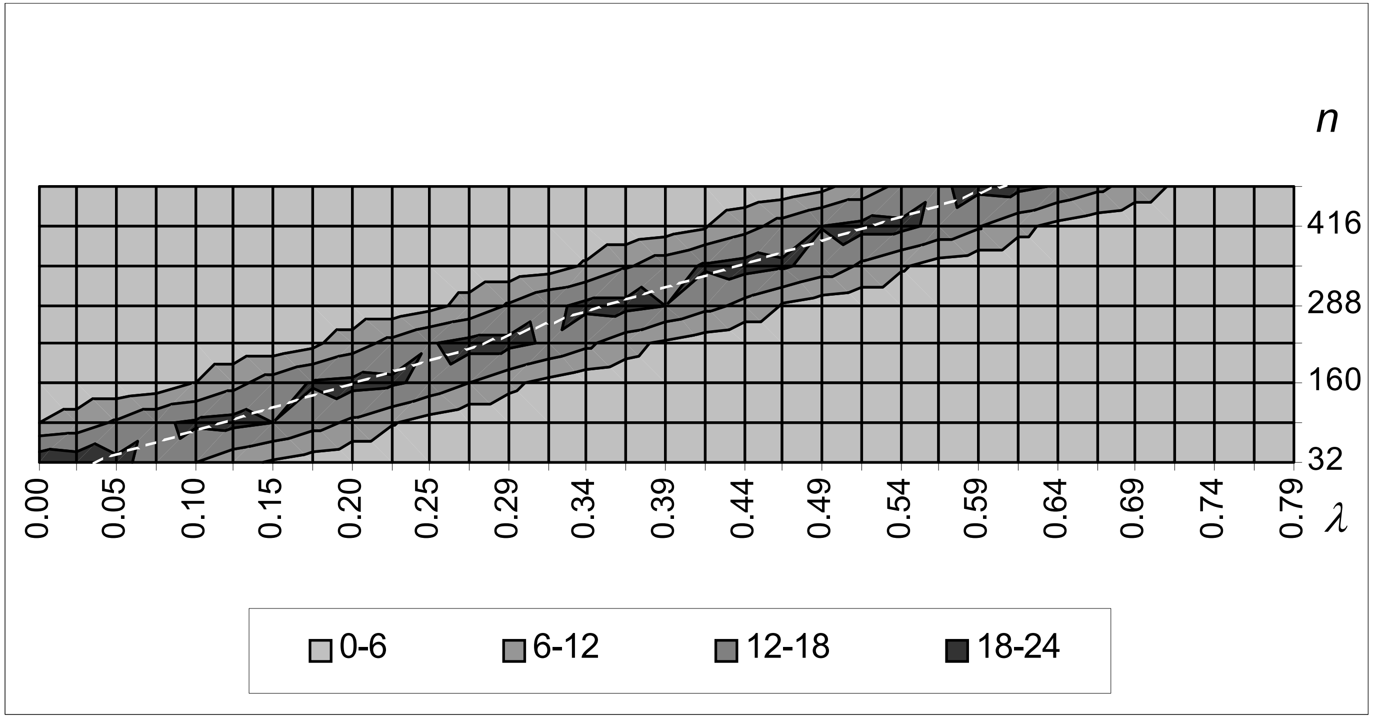



**Figura 4.25. Espectrograma do chirp linear. A inclinação da recta que passa pelos máximos corresponde à frequência instantânea.**

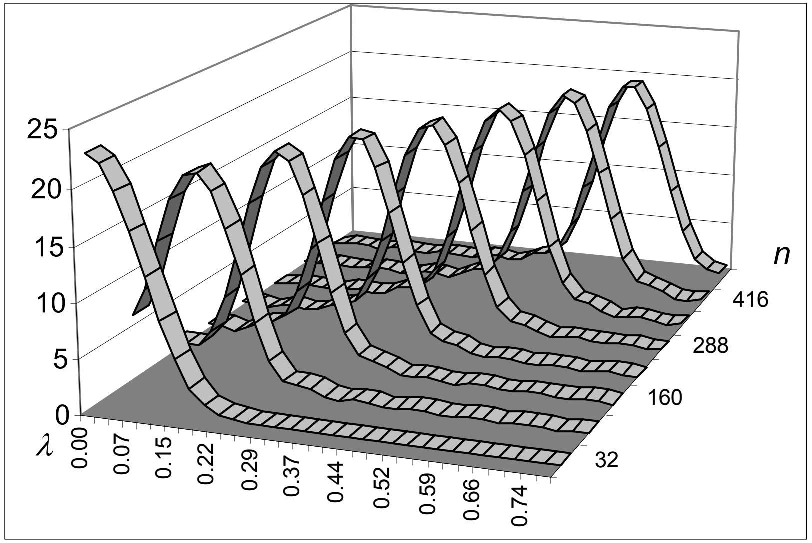



**Figura 4.26. Transformadas de Fourier correspondentes às várias translações da janela de Kaiser.**

A STFT é invertível se $w(0) \neq 0$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi w(0)} \int_0^{2\pi} X(n, \lambda) d\lambda$$

Usando $m' = n + m$, temos:

$$X(n, \lambda) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty 1} x(m') w(-(n - m')) e^{-j\lambda(n-m')}$$

Logo:

$$X(n,\lambda) = x(n) \otimes h_\lambda(n) \qquad e \qquad h_\lambda(n) = w(-n)e^{j\lambda n}$$

Na versão DFT, calculada com $N$ amostras, temos:

$$H_k(\omega) = W\left(e^{j[2\pi k/N-\omega]}\right)$$

Podendo-se obter a STFT a partir de um banco de N filtros.

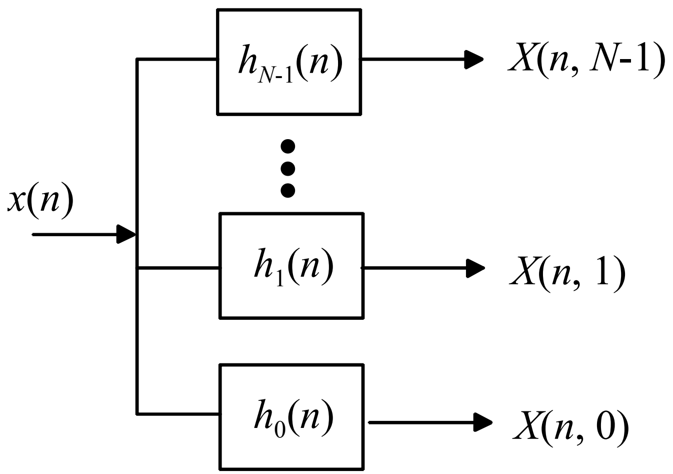



**Figura 4.27. Obtenção da STFT por um banco de filtros.**

**Influência da largura da janela:**

- Largura reduzida: boa resolução no tempo e má nas frequências. No limite, a janela tem apenas uma amostra, $w(n)=\delta(n)$, com espectro constante, não permitindo resolver nas frequências.

- Largura ampla: boa resolução nas frequências e má no tempo. No limite, a janela é constante, $w(n)=1$, não permitindo resolver no tempo.

**Princípio da incerteza:**

Dado o Teorema do escalamento:

$$af(at) \quad \Leftrightarrow \quad F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Então, nenhuma função pode ter uma resolução arbitrariamente boa simultaneamente no tempo e na frequência.

Usando como medidas de duração no tempo e na frequência:

$$d^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2\, dt; \qquad D^2 = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2\, d\omega$$

sendo $E$ a energia do sinal: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$

Prova-se que:

$$\text{Se } \sqrt{t}\, f(t) \to 0 \text{ com } |t| \to \infty \text{, então } Dd \geq 1/2$$

A igualdade é atingida apenas no caso da curva normal: $f(t) = Ae^{-\alpha t^2}$

**Exemplos:**

a) ECG amostrado a 500 Hz.

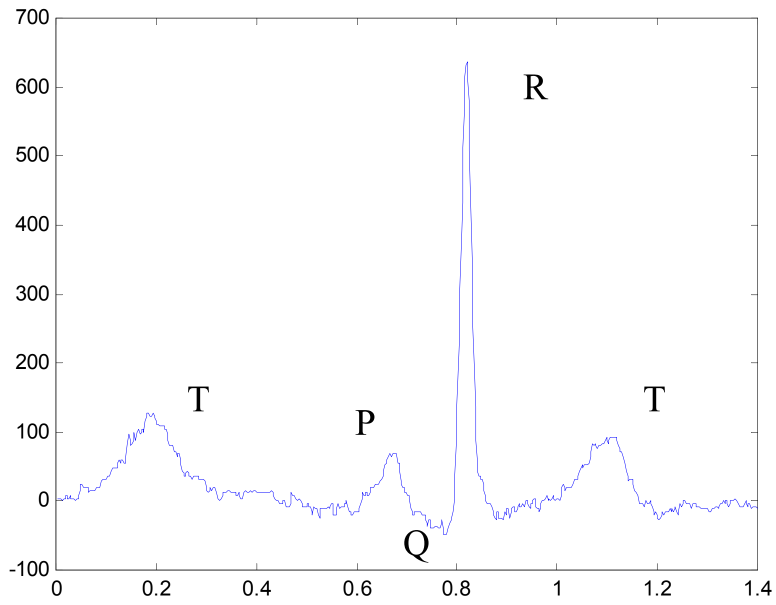



**Figura 4.28. ECG amostrado a 500 Hz, com indicação de vários componentes de onda.**

Análise no Matlab: specgram(x,512,500,kaiser(256,3.5),250) specgram(x,256,500,kaiser(128,3.5),120)
specgram(x,256,500,kaiser(64,3.5),60) specgram(x,256,500,kaiser(32,3.5),20)

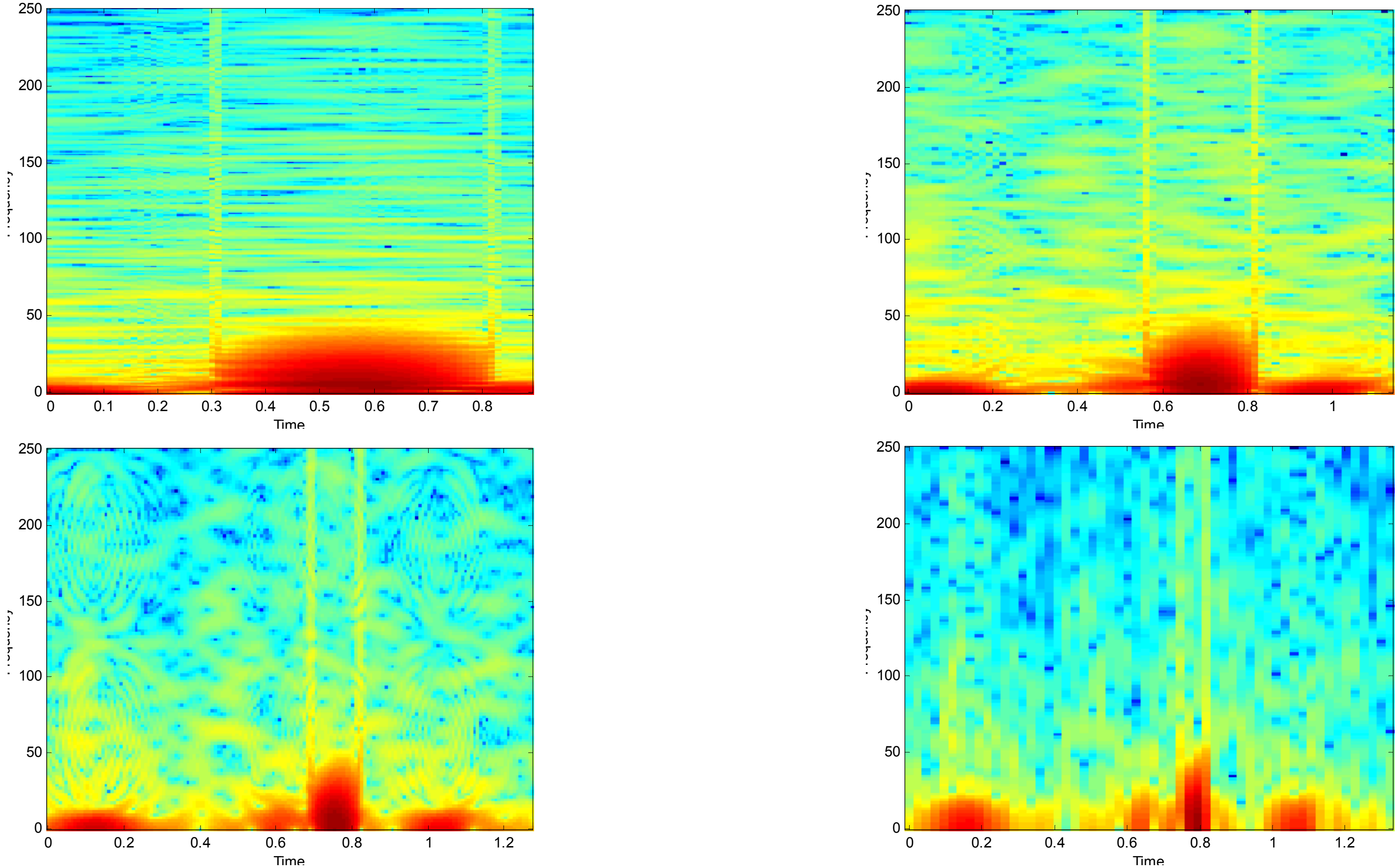



**Figura 4.29. Espectrogramas do ECG para uma largura de janela de 256, 128, 64 e 32 amostras.**

Notar a boa resolução no tempo e na frequência para 64 amostras, com a detecção dos componentes de onda de maior frequência, ondas Q, R.

b) Análise de sinais de voz

Frase "Boa tarde" amostrado a 4009 Hz; 2251 amostras.

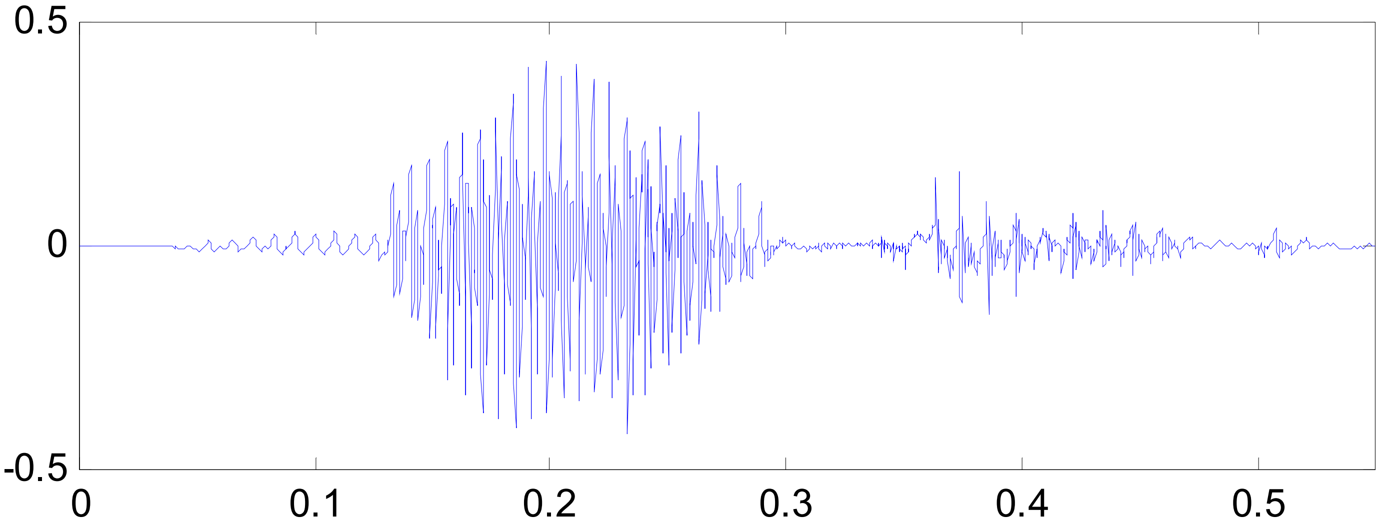



**Figura 4.30. Sinal de voz correspondente à frase "Boa tarde".**

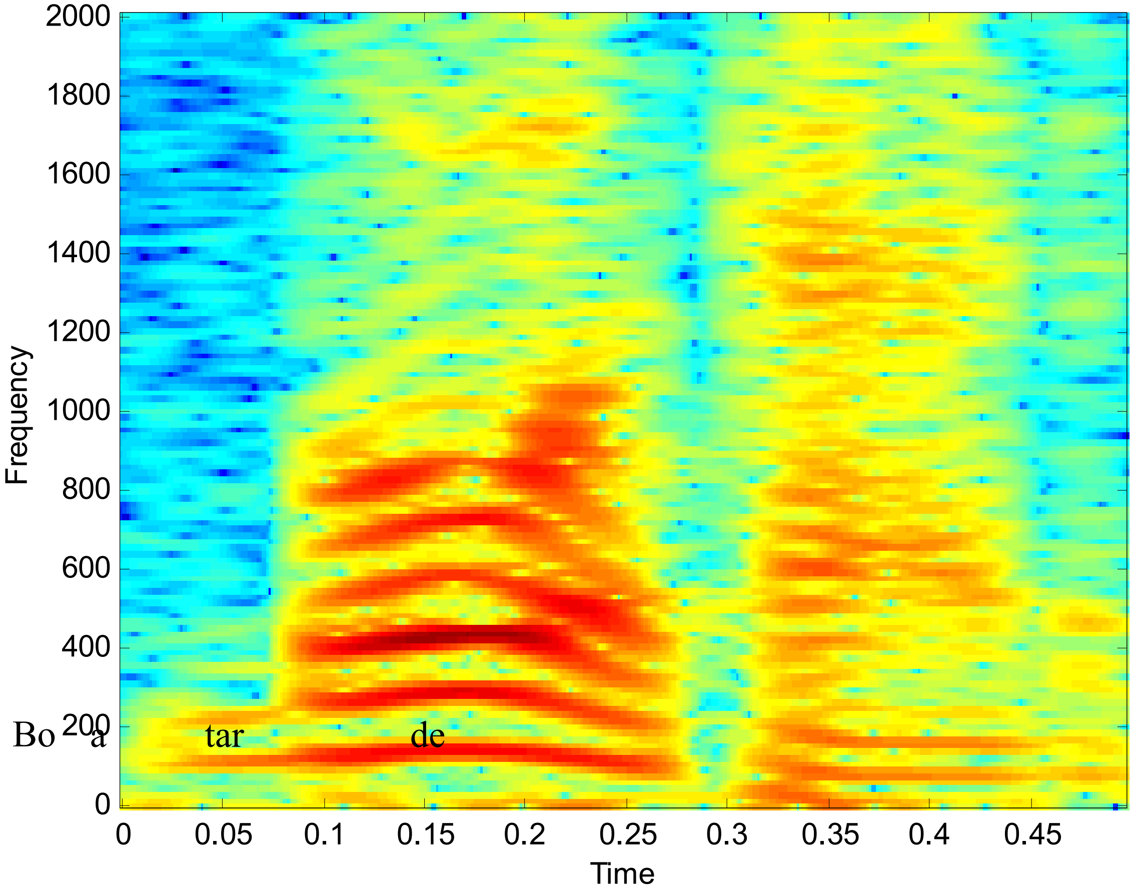



**Figura 4.31. Espectrograma do sinal anterior (Matlab: specgram(x, 256, 4009, hanning(256), 250). A transição entre fonemas è visível.**

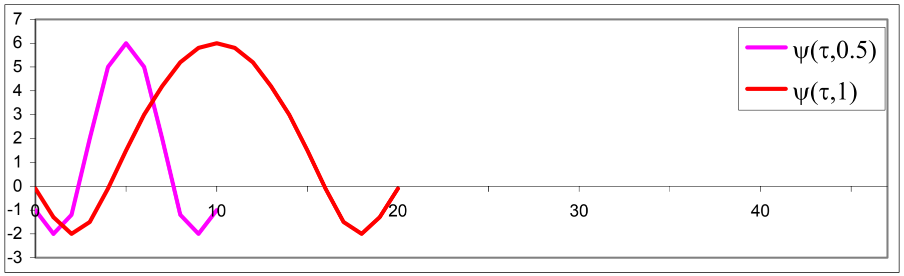
### 4.3.3 Transformada de ôndulas

Ideia-chave: em vez de avaliarmos a semelhança do sinal com uma sinusóide a múltiplas frequências, avaliamos a semelhança com uma "ôndula" a múltiplas escalas.

Transformada contínua de ôndulas (CWT):

$$W(\tau, a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^* \left( \frac{t-\tau}{a} \right) dt$$

O parâmetro $a$ é um factor de escala, de dilatação (quanto maior $a$, mais dilatada é a ôndula).



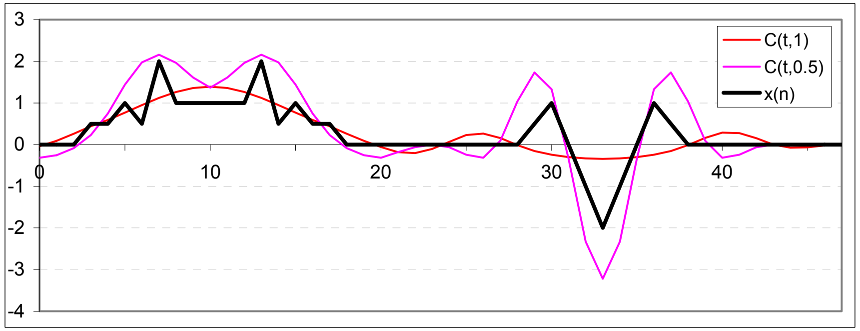




**Figura 4.32. Exemplo de duas ôndulas, a ôndula mãe para *a*=1 e outra comprimida para metade, e o resultado da sua aplicação a um sinal. Notar a descrição proporcionada pelas duas ondas.**

A transformada de óndulas preserva translações e escalamentos no tempo:

- $\tilde{x}(t) = x(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad W_{\tilde{x}}(\tau, a) = W_x(\tau - t_0, a)$
- $\tilde{x}(t) = \sqrt{|s|}\,x(st) \quad \Rightarrow \quad W_{\tilde{x}}(\tau, a) = W_x(s\tau, \frac{a}{s})$

Não preserva, contudo, translações na escala.

Note-se que a escala  está em correspondência inversa com a frequência: quanto maior a escala, menor a frequência e vice-versa. De facto, é possível escrever a CWT na forma:

$$W(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sqrt{\frac{f}{f_0}}\psi^*\left(\frac{f}{f_0}(t-\tau)\right)dt$$

sendo $\psi$ , a óndula mãe, uma função ou complexa do tipo passa-banda tendo $f_0$ como frequência central.

Também é possível escrever:

$$W(\tau, a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^*_{\tau,a}(t)dt \qquad \text{com} \qquad \psi_{\tau,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$

O factor $1/\sqrt{|a|}$ assegura que todas as óndulas têm a mesma energia.

Notar em particular que $\psi_{0,1}(t) = \psi(t)$ é a ôndula mãe.

A transformada inversa de ôndulas é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{C} \int_{a=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^2} W(\tau, a) \psi_{\tau,a}(t) da d\tau$$

A CWT proporciona uma representação redundante, já que não necessitamos de todo o suporte de $W(\tau,a)$ para recuperar $x(t)$.

De facto, obtém-se uma representação não redundante dilatações e translações múltiplos de 2:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} d(k,l) 2^{-k/2} \psi(2^{-k} t - l)$$

sendo $d(k, l)$ a *transformada discreta de ôndulas* (sinais reais).

Temos, agora, uma *representação diádica*.

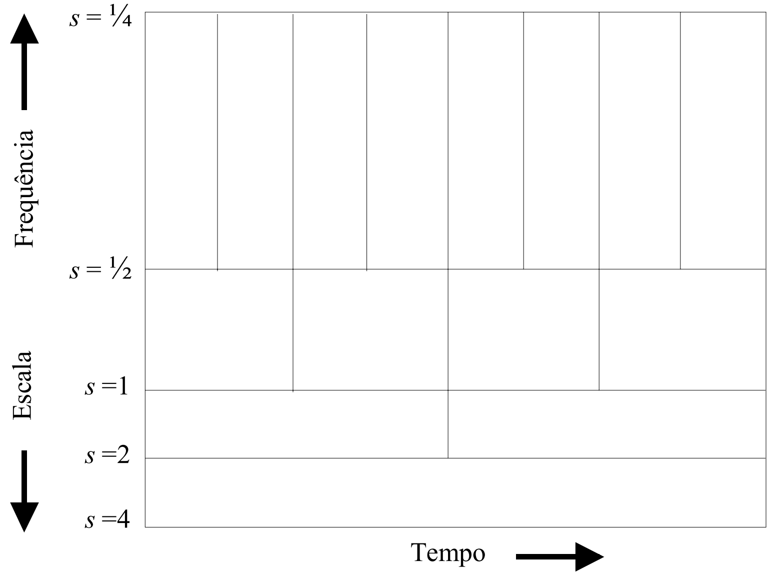



**Figura 4.33. Representação diádica da transformada discreta de ôndulas.**

Notar que:

- A largura das "caixas" é maior quando a altura é menor e vice-versa.
- A área das "caixas" é constante.

A transformada discreta de ôndulas tem assim um comportamento mais adequado que a STFT face ao princípio da incerteza.

A transformada discreta de ôndulas (DWT) é definida como:

$$d(k,l) = \frac{1}{2^k} \int_{2^k l}^{2^k (l+1)} x(t)\psi\left(2^{-k} t - l\right) dt$$

Suponhamos que as ôndulas satisfazem as seguintes condições:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$$

$$\langle \psi(t), \psi(t-n) \rangle = \delta(n)$$

$$\langle \psi(t), \phi(t-n) \rangle = 0, \qquad \text{com } \phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{outros } t \end{cases}$$

Então os coeficientes da DWT podem obter-se através da decomposição do sinal em:

- *Aproximações*: $x_k(t) = \frac{1}{2^k} \int_{2^k l}^{2^k (l+1)} x(\tau)\psi(\tau, k) d\tau$

- *Detalhes*: $g_k(t) = x_{k-1}(t) - x_k(t)$

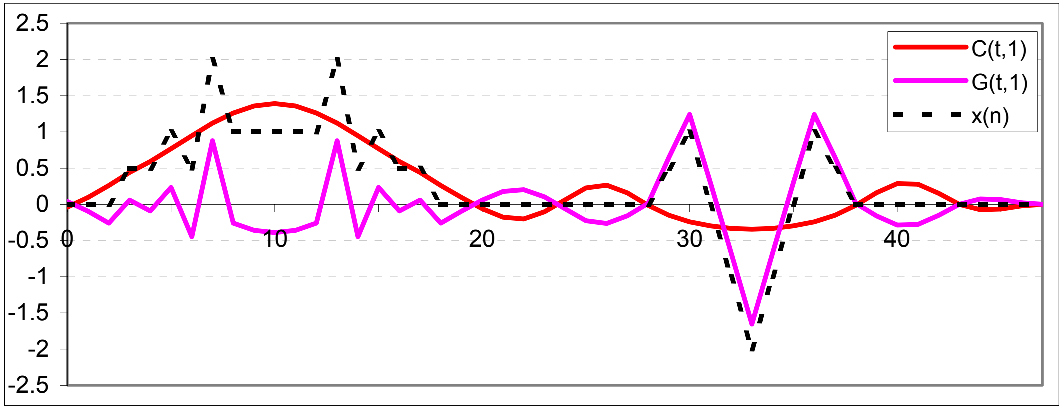



**Figura 4.34. Decomposição do sinal anterior em aproximação e detalhe.**

A decomposição é realizada usando filtros correspondentes às óndulas, com decimação por 2.

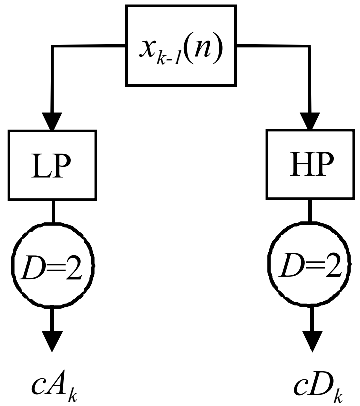



**Figura 4.35. Decomposição de um sinal em aproximação $cA_k$ e detalhe $cD_k$.**

A decomposição pode ser iterada em vários níveis até atingir um nível em que os detalhes só representam ruído branco.

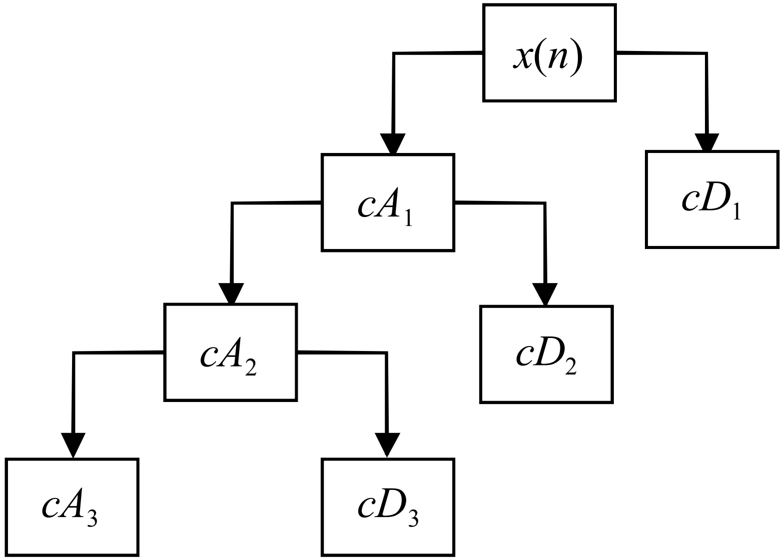



**Figura 4.36. Decomposição multinível (3 níveis) de um sinal em aproximações e detalhes.**

A reconstrução é feita "bottom-up" usando as interpolações duais das decimações.

Notar que:

- É necessário escolher a ôndula, ordem e nível de decompsição adequado ao problema.
- Na escolha da ôndula é necessário ter em conta as suas propriedades (ver referências)

**<u>Exemplos:</u>**

a) Análise de sinais

Análise do ECG: decomposição nas ondas componentes.

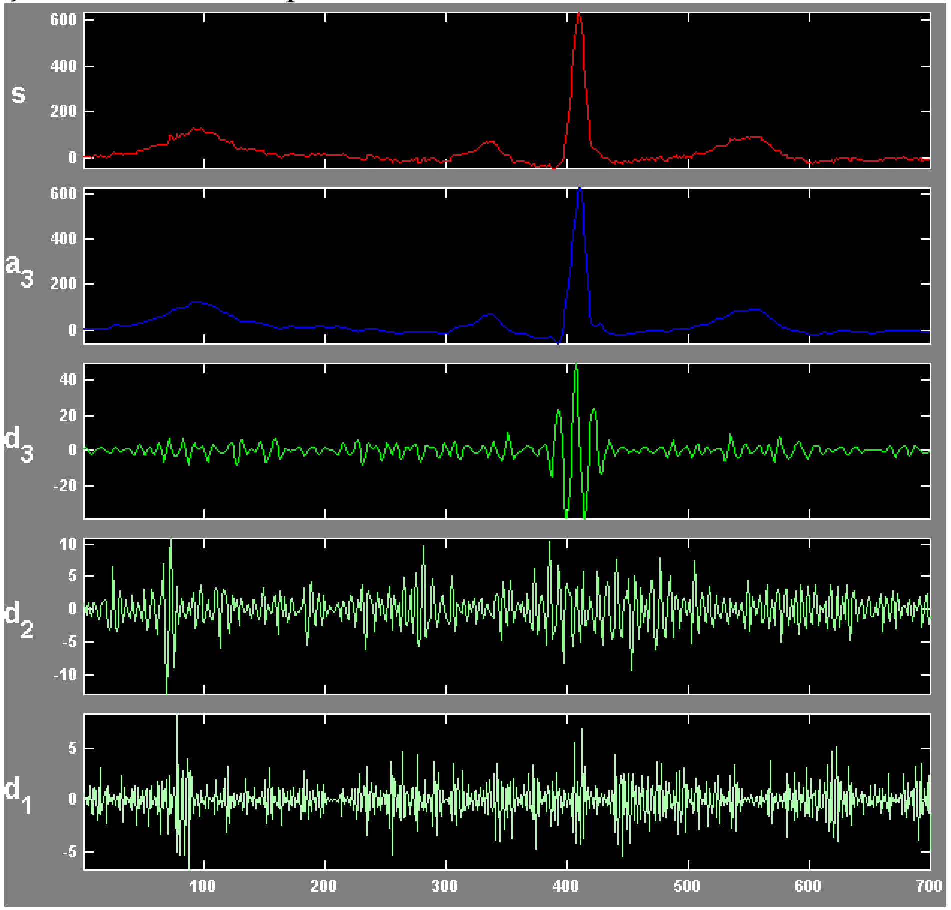



**Figura 4. 37. Aproximações e detalhes na análise do ECG usando a ôndula coiflet de ordem 3. Notar que o detalhe d3 só ocorre no segmento QR do sinal.**

b) Remoção de ruído em sinais

Remoção de ruído de alta frequência do ECG.

Método: fixação de limitações nos detalhes.

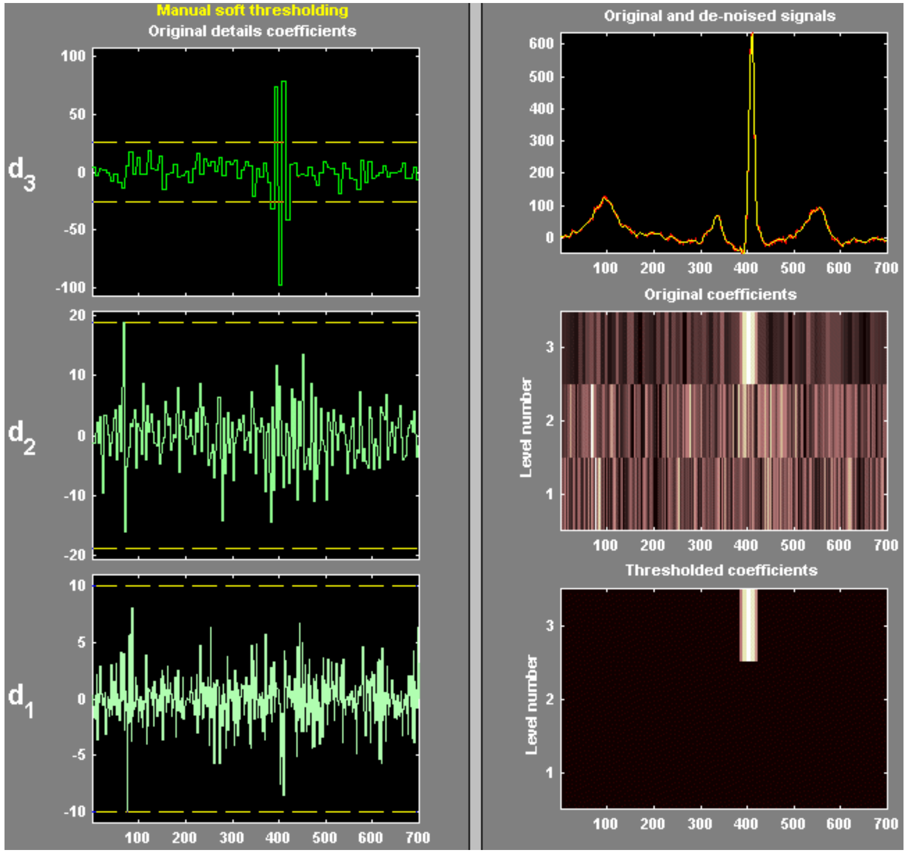



**Figura 4.38. Remoção e limitação de detalhes para o ECG anterior.**

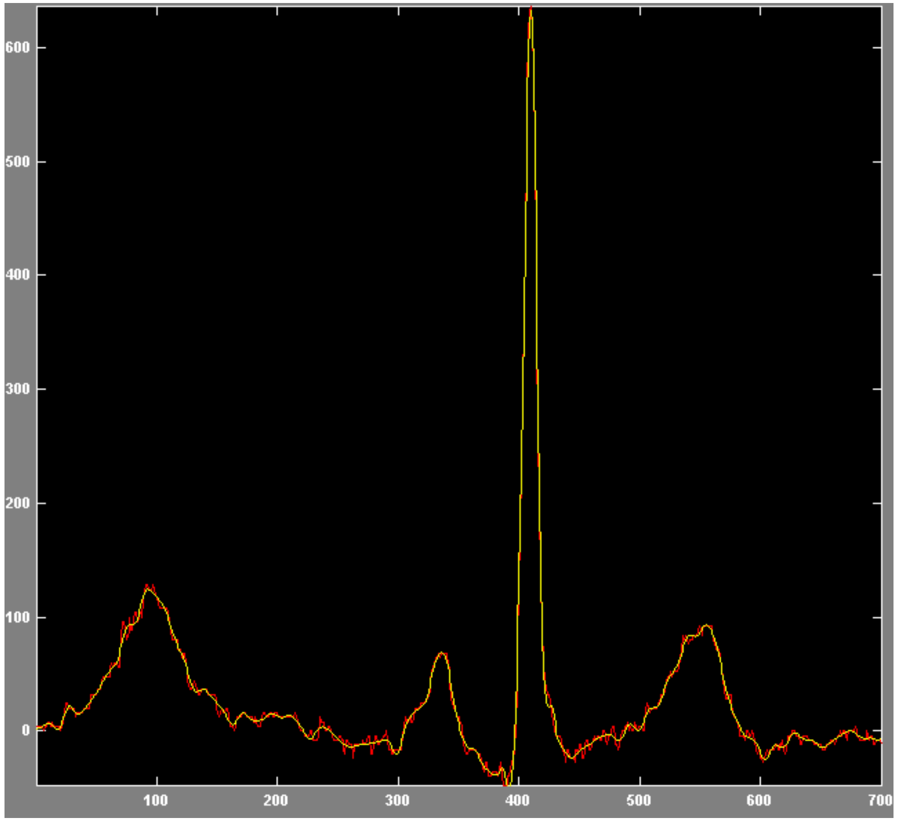



**Figura 4. 39. ECG original e reconstruído.**

c) Detecção de descontinuidades

$$x(n) = \begin{cases} \sin(2\pi 0.01 n), & 0 \le n \le 125 \\ \sin(2\pi 0.011 n - 0.9), & 126 \le n \le 250 \end{cases}$$

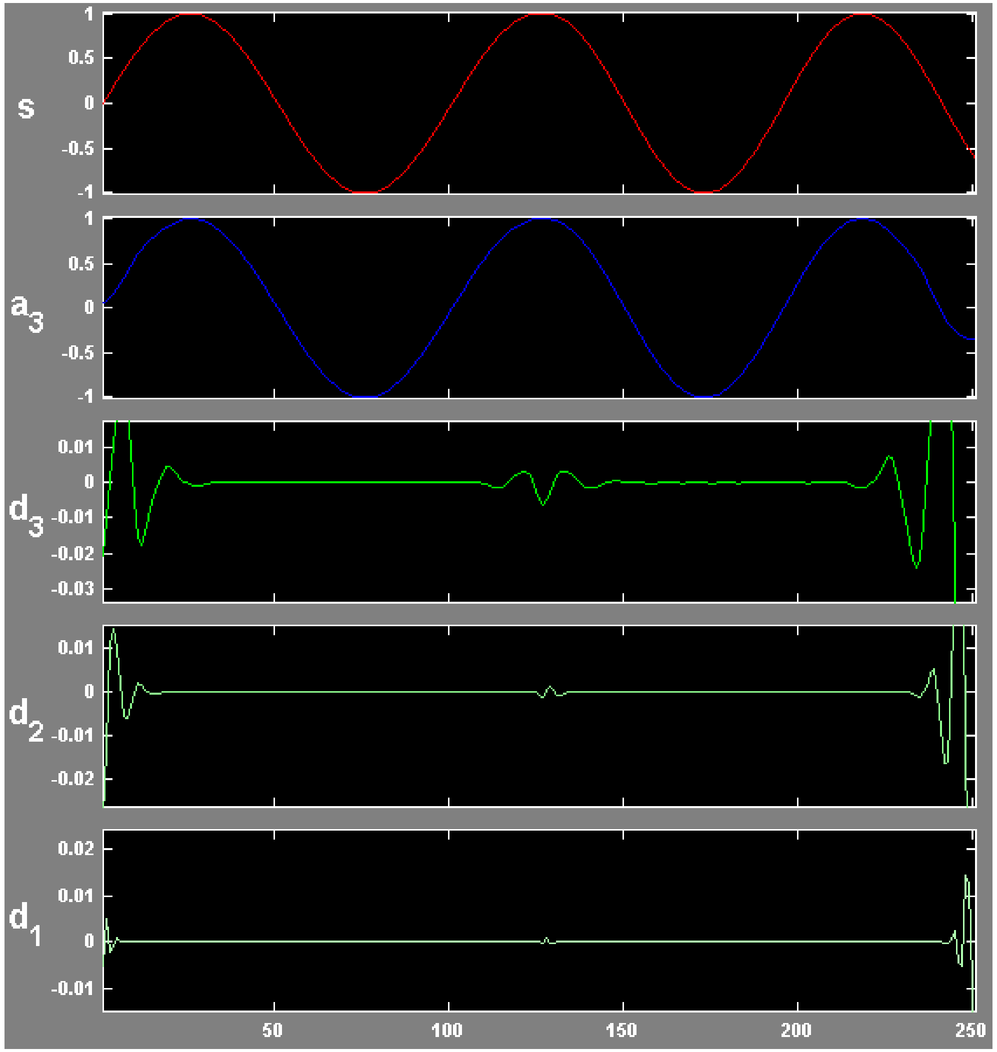



**Figura 4.40. Detalhes mostrando uma descontinuidade imperceptível (ôndula coif3; 3 níveis).**

d) Remoção de evoluções lentas ("trends")

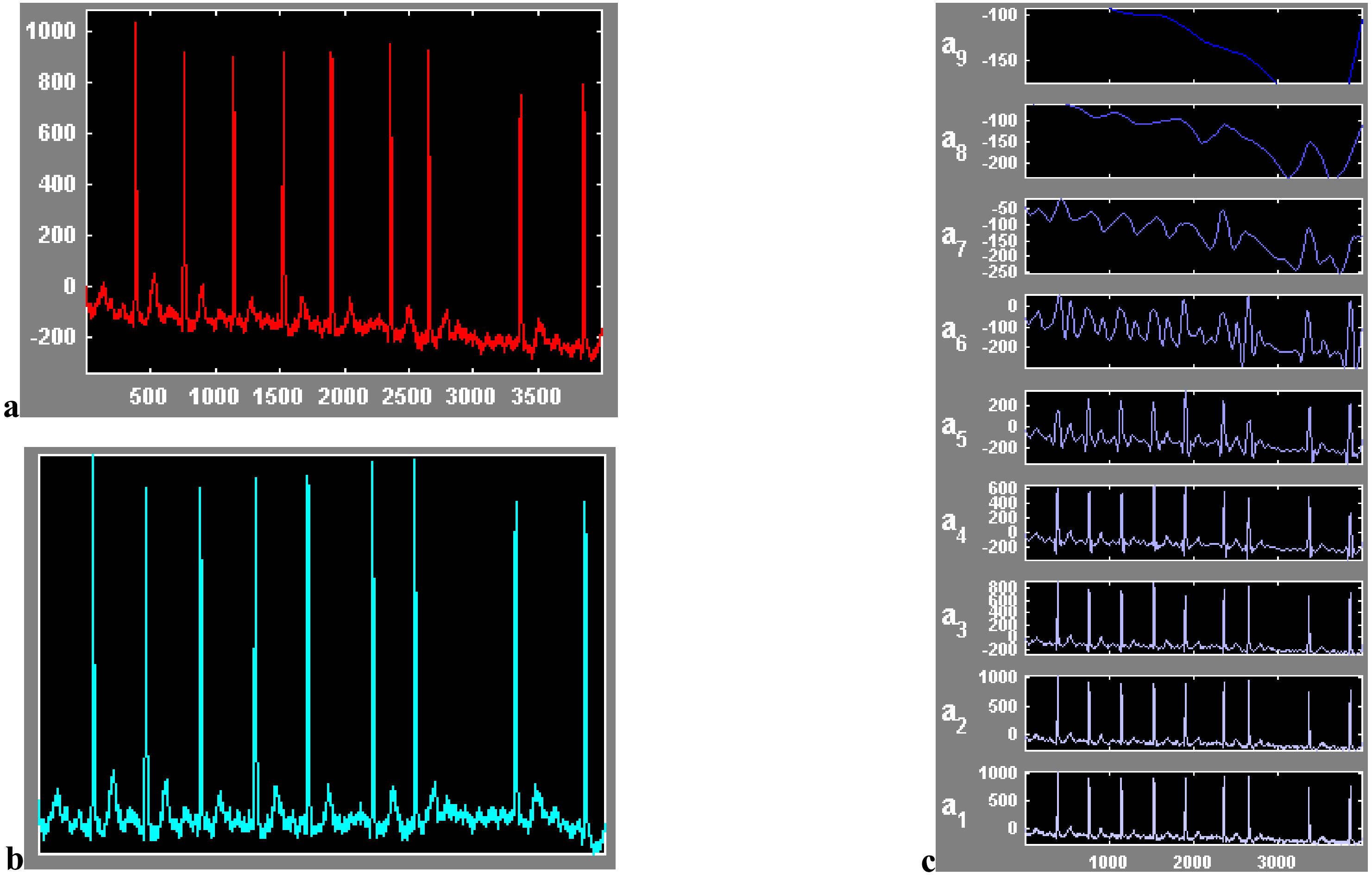



**Figura 4.41. Sinal ECG original (a) e sinal reconstruído (b) usando só os detalhes de uma decomposição em 9 níveis (c), usando a ôndula Daubechies db5.**

### 4.3.4 Transformada de Wigner

Transformação quadrática: adequada à representação tempo-frequência da energia de um sinal, logo, adequada à representação de sinais estocásticos não-estacionários.

**Transformada de Wigner:**

$$W(t,f)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^{*}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau=\int_{\nu=-\infty}^{\infty} X\left(f+\frac{\nu}{2}\right)X^{*}\left(f-\frac{\nu}{2}\right)e^{j2\pi t\nu}\,d\nu$$

**Propriedades:**

$$\int_{f} W(t,f)df=\left|x(t)\right|^{2}$$

$$\int_{t} W(t,f)df=\left|X(f)\right|^{2}$$

$$W^{*}(t,f)=W(t,f)$$

$$x(t-t_{0}) \quad\Rightarrow\quad W(t-t_{0},f)$$

$$x(t)e^{j2\pi f_{0}t} \quad\Rightarrow\quad W(t,f-f_{0})$$

$$\sqrt{|a|}\,x(at) \quad\Rightarrow\quad W\left(at,\frac{f}{a}\right)$$

**Exemplo:**

Segmentos de EEG de vigilância e sono com 500 amostras.

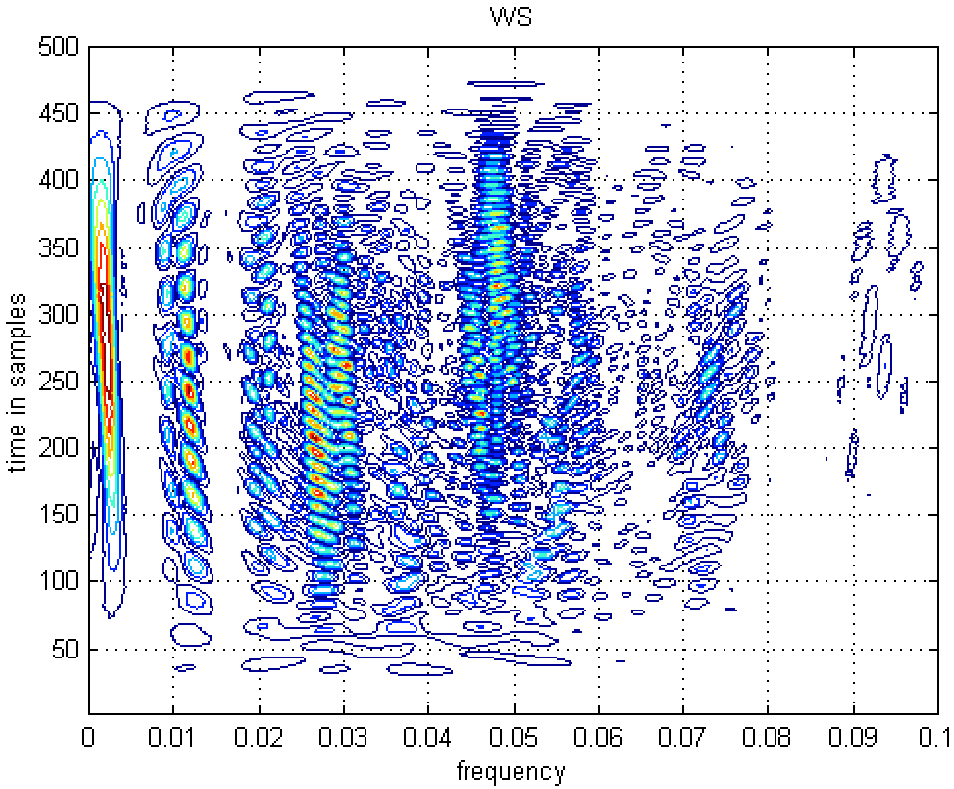



**Figura 4.42. Transformada de Wigner do EEG de vigilância.**

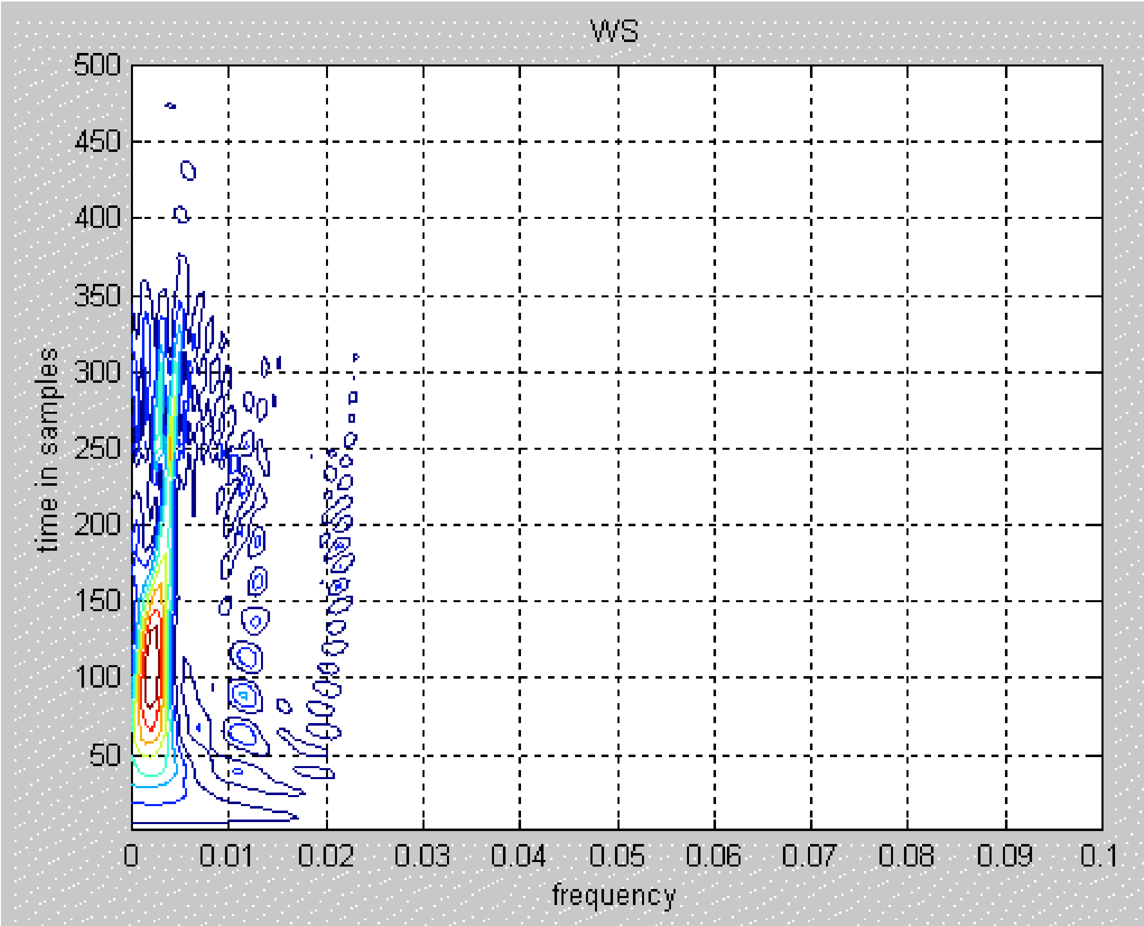



**Figura 4.43. Transformada de Wigner do EEG de sono.**

## Bibliografia

Cadzow JA (1982) Spectral Estimation: An Overdetermined Rational Model Equation Approach. Proc. IEEE, 70:907-938.

Cohen L (1989) Time-Frequency Distributions-A Review. Proc. IEEE, 77:941-981.

Hlawatsch F, Boudreaux-Bartels GF (1992) Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations. IEEE SP Magazine, April, 21-67.

Kuc R (1988) Introduction to Digital Signal Processing. Mc Graw-Hill, Inc.

Lindner DK (1999) Introduction to Signals and Systems. Mc Graw-Hill, Inc.

Lyons RG (1997) Understanding Digital Signal Processing. Addison Wesley Longman, Inc.

Oppenheim AV, Schafer RW, Buck JR (1999) Discrete-Tima Signal Processing. Prentice-Hall Inc.

Papoulis A (1984) Signal Analysis. McGraw-Hill, Inc.

Proakis JG, Manolakis DG (1996) Digital Signal Processiong. Principles, Algorithms and Applications. Prentice Hall Int., Inc.

Rabiner LR, Gold B (1975) Theory and Application of Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Inc.

Rao RM, Bopardikar AS (1998) Wavelet Transforms. Introduction to Theory and Applications.Addison-Wesley.

Robinson EA (1982) A Historical Perspective of Spectrum Estimation. Proc. IEEE, 70:885-906.

Schwarz M, Shaw L (1975) Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection, and Estimation. McGraw-Hill.