Modelos de Programação Linear Imprecisa

Manuel António Matos

FEUP 1996

índice

1. Introdução

A extensão da programação linear para ambientes de decisão em que predomina a incerteza permite continuar a usar modelos bem conhecidos dos analistas e agentes de decisão, mas sem o carácter peremptório acerca de dados e parâmetros que as ferramentas clássicas pressupõem. É possível, assim, abordar situações em que a fixação de valores teria de ser algo arbitrária, embora se conheçam distribuições de possibilidade ou, pelo menos, intervalos de variação para esses valores.

O presente texto foi elaborado na sequência da leccionação, em disciplinas de mestrado, de sessões introdutórias sobre esta matéria. Em consequência, tem um carácter fundamentalmente pedagógico, recomendando-se o aprofundamento destes conhecimentos através de consulta à bibliografia recomendada.

Essencialmente, abordam-se as diversas formulações para a extensão mais vulgarizada, aquela que incorpora incertezas nos recursos (termos independentes das restrições), discutindo-se as semelhanças e diferenças entre os vários modelos, e abordando-se o caso multiobjectivo. No entanto, também são referidos outros modelos, aplicáveis quando há incerteza nos coeficientes da função objectivo, e modelos para o caso em que todos os parâmetros são incertos.

O texto pressupõe conhecimentos básicos sobre conjuntos imprecisos (*fuzzy sets*) e sobre programação linear (PL). No entanto, a primeira secção recorda a formulação típica da PL, com o objectivo de fixar notação e servir de base à exposição seguinte. As restantes secções descrevem os modelos para diversas situações de incerteza no modelo base.

2. Programação Linear

Recorde-se o modelo típico dos problemas de programação linear em que se pretende maximizar uma quantidade (p.ex. produção) utilizando recursos limitados:

P1: Problema de programação linear

$$\begin{aligned} \max\ z &= \mathbf{c}'.\mathbf{x} \\ \text{suj} \quad A.\mathbf{x} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Nestes problemas, procura-se a *decisão óptima* **x*** que permita obter o *óptimo* z*=**c'.x***, respeitando as restrições (**x***∈X, sendo X={**x**≥**0** | A.**x**≤**b**}). Os valores dos recursos disponíveis **b** supõem-se conhecidos, bem assim como os coeficientes **c** da função objectivo.

As técnicas de resolução são bem conhecidas, avultando o algoritmo do Simplex (devido a Dantzig) que foi o padrão para estes problemas durante mais de quarenta anos. Modernamente, tem vindo a ganhar importância os algoritmos de ponto interior, a partir dos trabalhos de Karmarkar. A questão da resolução, no entanto, está para além do âmbito deste texto.

3. Decisões em ambiente de incerteza

Na maior parte dos casos reais, os valores de **b**, **c** e A do problema anterior não podem conhecer-se com exactidão, correspondendo a estimativas ou previsões das condições em que o processo de decisão toma lugar. Tradicionalmente, fazem-se estudos de pós--optimização, nos quais se procura determinar a sensibilidade dos resultados às variações dos dados.

Por um lado, preferem-se soluções robustas, ou seja, decisões que se mantêm óptimas para uma certa gama de valores dos termos independentes ou dos coeficientes da função objectivo. Por outro lado, não se querem descartar hipóteses de decisão muito favoráveis, apenas porque violam ligeiramente uma restrição cuja rigidez é, talvez, excessiva.

A introdução da teoria dos conjuntos imprecisos (*fuzzy sets*) permitiu atacar estas questões de forma sistemática, tendo surgido, nos anos mais recentes, uma multiplicidade de modelos com diferentes perspectivas de abordagem. Alguns aspectos, no entanto são comuns à generalidade dos modelos:

- Existência de uma situação de base, correspondente a um conjunto de valores com possibilidade 1, ou seja, uma situação compatível com a descrição linguística das variáveis. A diferença essencial para o caso rígido é que não se estipula que esta situação é única, nem que todas as outras não são de considerar;
- Necessidade de tomar decisões. Nos problemas operacionais como **P1**, a decisão óptima é o resultado da resolução do problema, não havendo, realmente, necessidade de tomar decisões, mas apenas de as aplicar. Mas, quando se toma em conta a incerteza, surge sistematicamente a necessidade de decidir entre obter mais (com maior risco), ou diminuir o risco (obtendo menos). Esta questão torna-se clara nas secções seguintes.

4. Recursos imprecisos

A primeira versão de programação linear imprecisa, e ainda hoje a mais divulgada, corresponde a modelizar a incerteza nos recursos, considerando que a situação expressa nas restrições corresponde a uma estimativa prudente dos valores disponíveis, ou que existe flexibilidade para alguma violação das restrições.

4.1. Modelo fundamental

Os modelos admitem, então, que os valores dos termos independentes **b** (em **P1**) podem ser ligeiramente ultrapassados, com insatisfação crescente, e sem ultrapassar uma certa tolerância p_i em cada restrição *i*. Havendo *m* restrições, isto corresponde a definir *m* conjuntos imprecisos:

$$\tilde{A}_i = \text{"}\mathbf{x} \text{ satisfaz a restrição } i\text{"}$$

com funções de pertença

$$u_i\left(\mathbf{x}, \tilde{A}_i\right) = \begin{cases} 1 & \left(A.\mathbf{x}\right)_i < b_i \\ \mu\left[\left(A.\mathbf{x}\right)_i - b_i\right] & b_i \le \left(A.\mathbf{x}\right)_i \le b_i + p_i \\ 0 & \left(A.\mathbf{x}\right)_i > b_i + p_i \end{cases} \tag{1}$$

onde $\mu \rightarrow [0, 1]$ é uma função monótona não crescente

A extensão do conceito de admissibilidade corresponde a substituir o conjunto X pelo conjunto impreciso $\tilde{X}$ = "**x** é admissível":

$$\tilde{X} = \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \ldots \tilde{A}_m$$

sendo o *grau de admissibilidade* da solução **x** dado por:

$$u_R\,(\mathbf{x}, \tilde{X}) = \min\,\{u_1(\mathbf{x}, \tilde{A}_1), u_2(\mathbf{x},\tilde{A}_2), ..., u_m(\mathbf{x},\tilde{A}_m)\}$$

Esta nova situação pode representar-se, nas formulações dos problemas, por

$$\mathbf{A.x} \le \tilde{\mathbf{b}} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{A.x} \,\tilde{\le}\, \mathbf{b}$$

significando, no primeiro caso, que se representa a incerteza nos recursos e, no segundo, que as restrições são flexíveis. Repare-se, no entanto, que a formulação matemática é comum às duas interpretações.

4.2. Resolução

Independentemente dos modelos, usa-se normalmente uma função μ linear, conduzindo a uma função de pertença aos conjuntos A_i com a seguinte forma:

$$u_i\left(\mathbf{x}, \tilde{A}_i\right) = \begin{cases} 1 & (A.\mathbf{x})_i < b_i \\ 1 - \dfrac{(A.\mathbf{x})_i - b_i}{p_i} & b_i \le (A.\mathbf{x})_i \le b_i + p_i \\ 0 & (A.\mathbf{x})_i > b_i + p_i \end{cases} \tag{2}$$

Por outro lado, define-se também, usualmente, um conjunto impreciso relacionado com a função objectivo:

$$\tilde{Z} = \text{"}\mathbf{x}\text{ satisfaz o objectivo"}$$

cuja função de pertença é construída de forma semelhante à anterior, com base na definição de uma *meta* b_0 e uma *tolerância* p_0, que exprimem as aspirações do agente de decisão e a rigidez com que as encara:

$$u_0\left(\mathbf{x}, \tilde{Z}\right) = \begin{cases} 0 & \mathbf{c}'.\mathbf{x} < b_0 - p_0 \\ 1 - \dfrac{b_0 - \mathbf{c}'.\mathbf{x}}{p_0} & b_0 \ge \mathbf{c}'.\mathbf{x} \ge b_0 - p_0 \\ 1 & \mathbf{c}'.\mathbf{x} > b_0 \end{cases} \tag{3}$$

Ou seja, se a solução **x** conduz a $z(\mathbf{x}) \ge b_0$, então é compatível com o conceito associado a $\tilde{Z}$, e $u_0=1$. Se o valor da função objectivo nem sequer está dentro da tolerância ($z<b_0-p_0$), o conceito não se aplica, e $u_0=0$. Nas situações intermédias, u_0 varia suavemente, exprimindo a proximidade a uma ou outra das situações extremas.

4.3. Modelo de Zimmermann

Neste modelo, o utilizador define o valor de b_0 e p_0, com o significado indicado atrás, e a função objectivo é transformada numa restrição adicional, que poderia escrever-se:

$$\mathbf{c}'.\mathbf{x} \tilde{\ge} b_0$$

a cuja satisfação ficava associada a função de pertença $u_0(\mathbf{x})$ definida anteriormente.

Tendo em conta que a "decisão óptima" é a intersecção do conjunto "**x** satisfaz as restrições" com o conjunto "**x** satisfaz o objectivo" (todos os três conjuntos são imprecisos), a decisão **x** a tomar será, finalmente, aquela que tiver a maior função de pertença:

$$\alpha = \max_{\mathbf{x}} \min\{u_R(\mathbf{x}),\ u_0(\mathbf{x})\} \qquad (4)$$

A determinação de **x** e α pode feita com facilidade se se notar que todos os valores dos graus de pertença das restrições (incluindo a da função objectivo) têm que ser *maiores* que α (ou α não seria o mínimo...). Por outro lado, procura-se o *maior* α que satisfaça essas condições e esteja no intervalo [0, 1]. Estas considerações conduzem ao problema de PL seguinte, que permite obter **x** e α.

P2: Problema auxiliar (Zimmermann)

$$\begin{aligned}
&\max\ \alpha \\
&\text{suj: } u_i(\mathbf{x}) \geq \alpha \qquad i = 0, 1, 2, ..., m \\
&\qquad \alpha \leq 1 \\
&\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \alpha \geq 0
\end{aligned}$$

Repare-se que **x** é a solução óptima (neste contexto), enquanto α dá uma ideia do risco associado, ou seja, se α estiver próximo de 1, as violações às condições base das restrições não são muito grandes, enquanto que, para valores baixos de α, há uma possibilidade elevada das restrições serem violadas.

Isto leva-nos à observação feita atrás, acerca da necessidade de tomar decisões. Na verdade, ao definir b_0 e p_0 , o agente de decisão estabeleceu, implicitamente, o risco associado à decisão final. Se ele entende que o risco é muito elevado, tenderá a resolver de novo **P2**, mas com uma meta menos ambiciosa (menor b_0) ou menos rígida (maior p_0). No caso de ser z* que é considerado insuficiente, poderá haver um processo inverso, sabendo-se que α diminuirá. Os métodos seguintes mostram diferentes maneiras de abordar esta questão.

4.4. Modelo de Werner

Esta abordagem usa um procedimento semelhante ao do modelo anterior, apenas sendo diferente a forma de definir o grau de satisfação do objectivo, ou seja, os valores de b_0 e p_0. Ao contrário do modelo de Zimmermann, em que esses valores são fixados pelo agente de decisão, Werner propõe a resolução prévia dos dois casos extremos que correspondem à versão base dos recursos (**b**) e à máxima quantidade de recursos disponíveis (**b+p**). Designando por z_0 o valor óptimo da função objectivo no primeiro caso, e por z_1 o valor óptimo no segundo caso, tem-se, para a *meta* e *tolerância*:

$$b_0 = z_1$$
$$p_0 = z_1 - z_0$$

A partir daqui, o processo é idêntico ao que se descreveu na secção anterior, incluindo a construção e resolução do problema auxiliar **P2**. Neste caso, não há qualquer intervenção do agente de decisão, o que pode ser entendido como uma vantagem (o modelo fornece, peremptoriamente, uma solução "óptima"), ou como uma desvantagem (a solução "óptima" pode envolver demasiado risco, ou pelo contrário ser demasiado prudente, dependendo da estrutura de preferências do agente de decisão).

4.5. Modelo de Verdegay

Neste modelo, a opção tomada é filosoficamente oposta da anterior, fazendo o agente de decisão participar explicitamente na decisão final. O processo começa por uma formulação paramétrica do problema base, que permite relaxar globalmente as restrições, de acordo com um parâmetro α, correspondente ao grau de satisfação mínimo do conjunto das restrições.

P3: Formulação paramétrica do problema

$$\begin{aligned} \max\ z &= \mathbf{c'.x} \\ \text{suj}\quad \mathbf{A.x} &\le \mathbf{b} + (1-\alpha).\mathbf{p} \\ \alpha &\le 1 \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \alpha &\ge 0 \end{aligned}$$

Ou seja, para $\alpha = 1$ tem-se o problema original, e diminuindo α vão-se obtendo soluções com *z* maior, à custa de uma maior utilização dos recursos, até ao máximo das tolerâncias, que corresponde a $\alpha = 0$. Repare-se que, nas duas situações extremas, a função objectivo toma os valores z_0 (para $\alpha = 1$) e z_1 (para $\alpha = 0$) referidos na secção anterior.

A ideia do método de Verdegay consiste em resolver **P3** para vários valores de α, e apresentar a lista de soluções ao agente de decisão, que escolherá então a *solução preferida*, em face dos valores de *z* e da robustez correspondente. Não há, portanto, qualquer tipo de prescrição, sendo de esperar que diferentes agente de decisão escolham diferentes alternativas, em função as suas diferentes percepções do risco e das suas aspirações em relação ao valor da função objectivo.

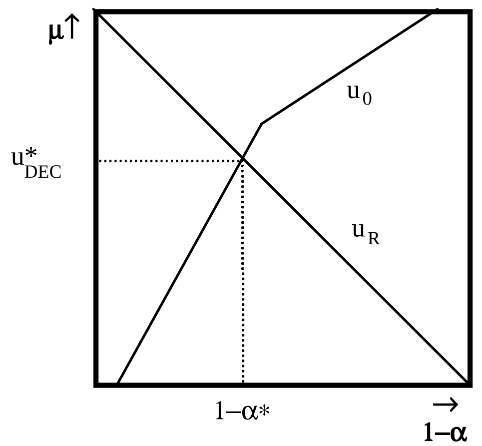
4.6. Modelo de Chanas

Este modelo combina várias características dos modelos anteriores, podendo dizer-se que é praticamente uma combinação dos modelos de Verdegay e de Zimmermann, com alguma representação gráfica (não essencial) associada. Inicialmente, tal como no modelo de Verdegay, é construído o problema paramétrico **P3**, de forma a gerar uma lista de valores de *z* para diversos graus de satisfação das restrições. No entanto, esta tabela não visa, como no caso anterior, uma decisão directa do agente de decisão, mas apenas permitir-lhe especificar b_0 e p_0 com maior conhecimento do problema do que acontecia no modelo de Zimmermann.

A segunda fase corresponde à resolução do problema **P2**, obtendo-se, portanto, a solução com maior grau de pertença ao conjunto impreciso "decisão óptima", tal como se referiu na secção 4.3. No entanto, podem aproveitar-se os valores já calculados na primeira fase para obter uma resolução gráfica relativamente simples, com recurso à expressão (3) e nos valores de b_0 e p_0 fixados pelo agente de decisão.

Na verdade, é possível traçar o gráfico de u_0 em função de $1-\alpha$, usando o valor de $z(\alpha)$ da tabela, a expressão (3) e os valores de b_0 e p_0, e determinar a intersecção com $u_R(1-\alpha)=\alpha$. O valor obtido corresponde ao máximo de $\min\{u_0, u_R\}$, que é a solução procurada. A função u_0 é normalmente linear por segmentos, correspondendo os pontos de quebra a mudanças na base óptima no problema paramétrico.

Figura 1: Modelo de Chanas - determinação gráfica da solução.



A figura 1 dá um exemplo do processo gráfico descrito, mostrando como se determina o valor de α* pretendido. A solução **x*** correspondente, e o valor de z*, podem ser obtidos da tabela, ou resolvendo o problema paramétrico **P3** para α*. Como se disse, esta solução é igual à que se obteria resolvendo directamente **P1** com os valores de b_0 e p_0 indicados pelo agente de decisão.

4.7. Modelo multiobjectivo de Zimmermann

O modelo de Zimmermann descrito em 4.3 também foi aplicado a problemas multiobjectivo, ou seja, problemas em que existem várias funções objectivo, normalmente conflituosas entre si. Na formulação matricial destes problemas (compare-se **P4** com **P1**), os vários vectores de coeficientes das funções objectivo são reunidos numa matriz C, ficando associado a cada solução **x** um vector **z** de valores das funções objectivo. Finalmente, escreve-se "max" para salientar a impossibilidade de maximizar simultaneamente todas as funções objectivo.

P4: Problema linear multiobojectivo

$$\begin{aligned} \text{"max" } \mathbf{z} &= C.\mathbf{x} \\ \text{suj} \quad A.\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A discussão deste tipo de problemas ultrapassa o âmbito deste texto, pelo que apenas se refere que se procura obter a *solução preferida*, conjugando as condições do problema **P4** com a estrutura de preferências do agente de decisão, muitas vezes através de procedimentos interactivos.

O modelo de Zimmermann para o caso multiobjectivo passa ao lado desta problemática, limitando-se a fazer uma extensão do modelo apresentado na secção 4.3, supondo novamente que os recursos disponíveis são dados com alguma tolerância. O agente de decisão é chamado a fornecer os valores das metas b_j e tolerâncias p_j para todos os objectivos, construindo-se as restrições correspondentes:

$$\mathbf{c}_j^{'}.\mathbf{x} \tilde{\geq} b_j$$

definindo-se os graus de pertença u_j (**x**) de forma semelhante à da expressão (3).

O problema auxiliar a resolver é também essencialmente igual a **P2**:

P5: Problema auxiliar para o caso multiobjectivo (Zimmermann)

$$\begin{aligned} &\max \alpha \\ &\text{suj: } u_j(\mathbf{x}) \geq \alpha \quad \text{todas as f.objectivo j} \\ &\quad\;\; u_i(\mathbf{x}) \geq \alpha \quad \text{todas as restrições i} \\ &\quad\;\; \alpha \leq 1 \\ &\quad\;\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

Tal como anteriormente, a resolução fornece o valor de α e a decisão "óptima" **x** correspondente, com o significado que se apontou na secção 4.3. No que respeita às funções objectivo, as preferências do agente de decisão ficam implicitamente definidas quando ele estabelece – separadamente – as metas e tolerâncias para cada uma das funções. Não há, portanto, qualquer julgamento sobre a importância relativa dos objectivos, o que tem sido apontado como um ponto fraco desta abordagem. Possivelmente, a utilização de um método menos prescritivo, como de Verdegay, poderia permitir ultrapassar parcialmente esta limitação.

5. Outros modelos paramétricos

Os modelos tratados até agora lidavam, exclusivamente, com a incerteza nos recursos, admitindo uma relaxação paramétrica das restrições até às tolerâncias máximas. Nesta secção, descrevem-se modelos que tratam a incerteza presente noutros parâmetros, mantendo o princípio paramétrico de existência de uma situação de base e variação conjunta dos parâmetros até um limite máximo.

5.1. Imprecisão nos coeficientes da função objectivo

Este modelo, de Verdegay, considera as restrições rígidas, mas admite que os valores dos coeficientes c_k da função objectivo (supostos positivos) podem variar conjuntamente até um máximo de c_k+q_k. Ou seja, consideram-se imprecisos os c_k, com a forma seguinte:

$$\tilde{c}_k = c_k + (1-\alpha).q_k \tag{5}$$

O modelo de Verdegay para estes problemas consiste em definir o problema dual do problema inicial (**P1** com coeficientes imprecisos):

P6: Problema dual (coeficientes imprecisos)

$$\begin{aligned} &\min z = \mathbf{b}'.\mathbf{y} \\ &\text{suj} \quad A'.\mathbf{y} \leq \mathbf{c} + (1-\alpha).\mathbf{q} \\ &\qquad \mathbf{y} \in R \end{aligned}$$

Com pequenas diferenças, fica-se com um problema com incerteza nos recursos, podendo aplicar-se, portanto, qualquer dos modelos referidos na secção anterior.

5.2. Imprecisão em todos os parâmetros

O modelo proposto por Carlsson e Korhonen pemite lidar com problemas em que a incerteza afecta os recursos, os coeficientes da função objectivo e a matriz dos coeficientes tecnológicos.

P7: Incerteza em todos os coeficientes

$$\begin{aligned} &\max \tilde{\mathbf{c}}'.\mathbf{x} \\ &\text{suj} \quad \tilde{A}.\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{b}} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Em todos os casos, supõe-se uma variação paramétrica, tal como tem vindo a ser considerado neste capítulo. A partir de valores de base c_k, b_i e a_{ik} admite-se uma varição paramétrica conjunta até limites respectivamente q_k, p_i e r_{ik}, ou seja:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= c_k + (1-\alpha).q_k \\ \tilde{b}_i &= b_i + (1-\alpha).p_i \\ \tilde{a}_{ik} &= a_{ik} + (1-\alpha).r_{ik} \end{aligned}$$

A substituição em **P7** leva ao estabelecimento de um problema parametrizado em α, que pode ser abordado segundo o conceito usado no modelo de Verdegay descrito em 4.5, resolvendo para vários valores de α e apresentando a lista correspondente ao agente de decisão, que finalmente escolhe o risco que está disposto a correr, em face da remuneração (o valor de z) associada. Na versão original, são usadas funções de pertença não-lineares (aparentadas com funções utilidade) e diferentes para cada classe de valores, conduzindo a um problema tecnicamente complexo, de carácter prescritivo (semelhante ao modelo de Chanas que se descreveu atrás).

Trata-se de um modelo bastante simplificado, onde a presunção de variação conjunta de todos os parâmetros é dificilmente justificável. Esta deficiência, comum a todas as perspectivas paramétricas, pode ser ultrapassada pela consideração de *verdadeiros* números imprecisos, como se verá, embora superficialmente, no capítulo seguinte.

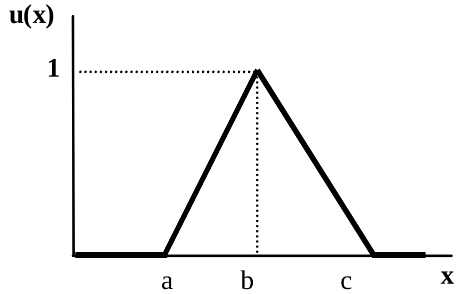
6. Modelos não-paramétricos

Em todos os modelos do capítulo anterior, partia-se de uma situação de base considerada *certa*, que permitia obter um determinado resultado para os problemas, mas admitia-se que poderia haver variação dos parâmetros (ou termos independentes das restrições) no sentido *favorável* (permitindo aumentar o resultado), sendo essa variação conjunta em todos os valores.

Não é essa, no entanto, a situação mais frequente quando se lida com quantidades incertas. Geralmente, é dado um valor central (ou um intervalo), com possibilidade 1, e margens de variação lateral, correspondendo a intervalos cada vez mais largos onde se pode situar o valor, com possibilidade associada cada vez menor. Uma forma vulgar de representação são os números triangulares, como o da figura 2.

Esta representação está bastante generalizada, nomeadamente na Engenharia, em particular nos estudos de planeamento, onde as estimativas feitas por peritos têm normalmente associada uma incerteza "bilateral" bem modelizada pelos números triangulares (ou trapezoidais).

Figura 2: Número triangular



Nas secções seguintes dá-se um exemplo de um modelo de programação linear que usa números triangulares para modelizar a incerteza nos coeficientes da função objectivo.

6.1. Coeficientes imprecisos na função objectivo

Adimitindo que a incerteza associada aos coeficientes da função objectivo de **P1** é representada por números triangulares:

$$\tilde{c}_k = \left(c_k^a, c_k^b, c_k^c\right)$$

onde os índices a, b, c têm o significado descrito na figura 2, verifica-se que o valor da função objectivo correspondente a uma solução **x** passa a ser, também, uma quantidade imprecisa. Aplicando as regras operatórias da aritmética dos números imprecisos, pode calcular-se esse valor de forma bastante simples, através de

$$\tilde{z} = \sum_k \left(c_k^a.x_k, c_k^b.x_k, c_k^c.x_k\right)$$

ou

$$\tilde{z} = \left(\mathbf{c}'_\mathbf{a}.\,\mathbf{x}, \mathbf{c}'_\mathbf{b}.\,\mathbf{x}, \mathbf{c}'_\mathbf{c}.\,\mathbf{x}\right)$$

onde $\mathbf{c}'_\mathbf{a} = \left[c_1^a\ c_2^a \ldots c_n^a\right]$, etc.

6.2. Modelo de Lai e Hwang

Neste modelo, parte-se do princípio que os valores $\mathbf{c_a}$ correspondem à situação "mais pessimista", sendo $\mathbf{c_c}$ os "mais optimistas" e $\mathbf{c_b}$ a situação de maior possibilidade. Note-se que isto só se aplica se todos os valores forem positivos, o que pode não acontecer, e obriga a algumas alterações não triviais.

Nestas circunstâncias, os autores constroem um problema auxiliar, considerando que:

- Interessa maximizar a função objectivo para os valores com maior possibilidade;
- Interessa alargar o resultado impreciso $\tilde{z}$ no sentido dos valores mais optimistas, ou seja, se estes ocorrerem, a decisão **x** deve permitir aproveitá-los;
- Interessa apertar $\tilde{z}$ em relação aos valores pessimistas, para que a sua ocorrência não faça piorar muito o resultado.

O novo problema, que é um problema linear tri-objectivo, tem a formulação que se descreve a seguir.

P8: Problema auxiliar (Lai e Hwang)

$$\begin{aligned}
&\max\ \mathbf{c}_{\mathbf{b}}'.\mathbf{x}\\
&\max\ (\mathbf{c}_{\mathbf{c}} - \mathbf{c}_{\mathbf{b}})'.\mathbf{x}\\
&\min\ (\mathbf{c}_{\mathbf{b}} - \mathbf{c}_{\mathbf{a}})'.\mathbf{x}\\
&\text{suj}:\quad \mathbf{x} \in X
\end{aligned}$$

Como se disse anteriormente (cf 4.7.), a resolução de um problema multiobjectivo implica a participação do agente de decisão, que valorizará os três objectivos de acordo com as suas preferências. Por exemplo, se se pretender minimizar o arrependimento futuro em relação a uma decisão única, o terceiro objectivo ganha importância (juntamente com o primeiro) em relação ao segundo. Por outro lado, se a necessidade de tomar decisões se repete, a primeira função objectivo torna-se com certeza prevalecente, e a segunda pode ganhar importância. Essencial é assentar-se que, neste tipo de problemas, não se pode determinar uma solução óptima inquestionável, pois diferentes estilos de decisão conduzem a soluções "óptimas" diferentes, todas elas defensáveis.

Uma vez obtida, a solução do problema auxiliar **P8** constitui também a solução de **P7**, na perspectiva indicada. Seriam possíveis outras abordagens, mais ou menos prescritivas, mas é de notar que a transformação num problema de decisão é inevitável, pois, em ambiente incerto, sempre haverá que escolher entre risco e resultado que pode ser obtido.

7. Sugestões bibliográficas

O princípio

Zadeh, L.A. (1965), "Fuzzy Sets", *Information and Control 8,* 338-353.

A primeira bíblia

Dubois, D., Prade H. (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.

Possivelmente, o melhor para começar

Zimmermann, H.J. (1985), *Fuzzy Sets Theory and Its Applications*, Kluwer-Nijhoff, Boston.

Tópicos interessantes sobre SAD

Zimmermann, H.J. (1987), *Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems*, Kluwer, Boston.

Para mergulhar nas profundezas da incerteza

Klir, G.J., Folger, T.A. (1988), *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice-Hall, New Jersey.

Review muito actual e didático

Lai, Y.-J., Hwang, C.-L. (1992), *Fuzzy Mathematical Programming - Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin.