Modelização

Slide 1

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Maria Antónia Carravilla
José Fernando Oliveira

Slide 2

Modelização
Os 10 princípios

- Não criar um modelo complicado quando um simples é suficiente.
- Não moldar o problema à técnica de resolução que se pretende utilizar.
- Resolver rigorosamente o modelo encontrado. Só assim se saberá se hipotéticas inconsistências das soluções do modelo com a realidade têm origem no próprio modelo ou não.
- Validar os modelos antes de os implementar.
- O modelo não deve ser tomado literalmente pois nunca é a realidade.
- O modelo não deve ser forçado a fazer, ou ser criticado por não fazer, aquilo para que não foi criado.
- Não sobrestimar os modelos.
- Uma das principais vantagens da modelização é o processo de desenvolvimento do modelo.
- Um modelo não pode ser melhor do que a informação usada na sua construção.
- Os modelos nunca substituem os agentes de decisão.

Formulação de modelos matemáticos em Investigação Operacional

Slide 3

Algoritmo para construir um modelo matemático para um problema de Investigação Operacional:

Passo I — Determinar, no problema concreto, aquilo que é fixo e não pode ser alterado e aquilo que se pode decidir *(variáveis de decisão)*. Representar essas variáveis de uma forma algébrica.

Passo II — Identificar as *restrições* do problema, isto é, aquilo que limita as nossas decisões, e representá-las como igualdades ou desigualdades que sejam funções das variáveis de decisão.

Passo III — Identificar o(s) *objectivo(s)* do problema e representá-lo(s) como uma *função* das variáveis de decisão, que deve ser minimizada ou maximizada.

Nota: Só existe problema quando há mais do que uma solução admissível.

Problema de Mistura de Produtos

Slide 4

A companhia Electro & Domésticos pretende escalonar a produção de um novo apetrecho de cozinha que requer dois recursos: mão-de-obra e matéria-prima. A companhia considera a hipótese de 3 modelos diferentes, tendo o seu departamento de engenharia fornecido os seguintes dados:

Modelo	A	B	C
Mão-de-obra (horas por unidade)	7	3	6
Matéria-prima (quilos por unidade)	4	4	5
Lucro ($ por unidade)	4	2	3

O fornecimento de matéria-prima está limitado a 200 quilos/dia. Por dia estão disponíveis 150 horas de trabalho. O objectivo é maximizar o lucro total. Formule o modelo que permitiria resolver este problema.

Problema da refinaria de petróleo

Slide 5

Uma refinaria de petróleo pode misturar 3 tipos de crude para produzir gasolina normal e super. Existem disponíveis duas unidades de mistura. Para cada ciclo de produção a unidade mais antiga usa 5 barris de crude A, 7 barris de crude B e 2 barris de crude C para produzir 9 tanques de gasolina normal e 7 de gasolina super. A unidade de mistura mais recente usa 3 barris de crude A, 9 de B e 4 de C para produzir, num ciclo de produção, 5 tanques de gasolina normal e 9 de super.

Devido a contratos já assinados, a refinaria tem que produzir, pelo menos, 500 tanques de normal e 300 tanques de super. Existem disponíveis 1500 barris de crude A, 1900 de crude B e 1000 de crude C. Por cada tanque de gasolina normal produzida a refinaria ganha 6 unidades monetárias e, por tanque de super, 9 unidades monetárias.

O problema é saber como utilizar as reservas de crude e as duas unidades de mistura, de forma a, respeitando os compromissos assumidos, maximizar o lucro da refinaria.

Aluguer de espaço num armazém

Slide 6

Uma empresa planeia alugar espaço num armazém, sendo as suas necessidades para os próximos 5 meses as seguintes:

Mês	Necessidade de espaço (m^2)
1	1500
2	1000
3	2000
4	500
5	2500

Período de aluguer (meses)	Custo por m^2 ($)
1	2800
2	4500
3	6000
4	7300
5	8400

Construa um modelo que permita determinar o esquema de contratos a assinar, por forma a satisfazer as necessidades de espaço o mais economicamente possível.

A companhia de aviação Benvoa

Slide 7

A companhia de aviação Benvoa vai comprar aviões a jacto de passageiros, para viagens longas, médias e curtas (tipos A_l, A_m e A_c, respectivamente). Os custos unitários, em milhões de escudos são, respectivamente, de 5000, 3800 e 2000. A administração da companhia autorizou a verba máxima de 112000 milhões de escudos para esse efeito. Admite-se que os lucros anuais sejam de 310, 230 e 200 milhões de escudos com cada um dos tipos de avião A_l, A_m e A_c, respectivamente. Haverá pilotos suficientes para pilotar, no máximo, 30 aviões novos. Se apenas fossem comprados aviões A_c, os serviços de manutenção suportariam 40 aviões novos. Contudo, cada avião A_m equivale a 4/3 de um avião A_c e cada avião A_l a 5/3 de um avião A_c, no que diz respeito à manutenção. A direcção técnica é ainda de opinião que, por cada avião A_c que seja comprado, se comprem também pelo menos um avião A_l ou um avião A_m. Por outro lado, seleccionado um avião A_l para comprar, também deverão ser comprados pelo menos 8 aviões A_c ou A_m. Com estes dados, a gestão da empresa deve decidir a quantidade de aviões de cada tipo a comprar, de modo a maximizar o lucro. Formule um modelo para este problema.

Urbanização

Slide 8

Pretende-se urbanizar um determinado terreno. O terreno divide-se em 3 zonas com características, em termos de relevo, localização e tipo de subsolo, diferentes: Z_1, Z_2 e Z_3. Esta urbanização deverá incluir áreas para fins residenciais — A_r —, áreas verdes — A_v — e de equipamentos sociais — A_e.

O custo de construção de um determinado tipo de área (R, V ou E) em Z_1, Z_2 ou Z_3 é proporcional à respectiva área de construção, sendo as constantes de proporcionalidade diferentes entre si e conhecidas.

É necessário construir pelo menos K hectares de A_r e garantir que os quocientes $\frac{A_e}{A_r}$ e $\frac{A_v}{A_r}$ não sejam inferiores a l e m (conhecidos), respectivamente.

Pretende-se conhecer as áreas a atribuir a R, V, e E nas zonas Z_1, Z_2 e Z_3.

1. Formule o problema nas seguintes condições (será resolúvel por Programação Linear?):
   (a) As condições relativas a l e m devem ser satisfeitas em cada zona.
   (b) As condições relativas a l e m devem ser satisfeitas para o conjunto de Z_1, Z_2 e Z_3.
2. Qual a relação de ordem existente entre o custo total da solução óptima calculável em **(i)** e em **(ii)**? Justifique.
3. Formule o problema como em **(ii)** mas admitindo que se as áreas para E forem maiores que p então as áreas para V serão maiores que q (p e q conhecidos).

Fábrica de papel

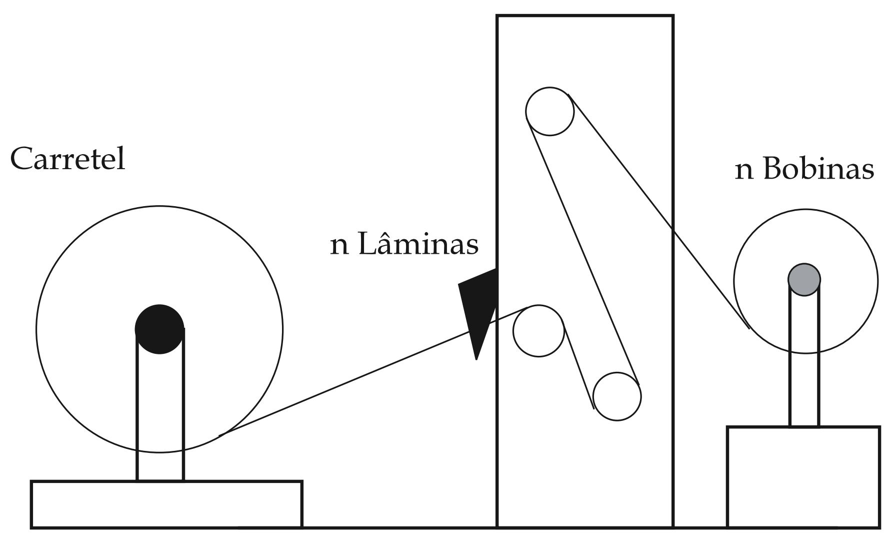
O papel é normalmente fabricado em rolos grandes (em largura e em diâmetro), que depois são dividos em rolos mais pequenos, que por sua vez poderão ser directamente para clientes ou para cortar em formatos.

Slide 9

Vejamos o seguinte exemplo. O papel é produzido em rolos com 6 metros de largura. A partir deste rolos é necessário produzir 30 rolos mais pequenos com 280cm, 60 rolos com 200cm e 48 rolos com 150cm. Assim sendo, um rolo de 6 metros pode ser dividido, por exemplo, em 2 rolos de 280, sobrando um "rolinho" de 40cm que é considerado desperdício. Assumindo que existem rolos grandes em quantidade suficiente para satisfazer esta encomenda, o problema consiste em determinar a forma de cortar os rolos grandes de forma a minimizar o desperdício.

Fábrica de papel — Bobinadora

Slide 10



Aeroporto Aletrop - Manutenção

Slide 11

O aeroporto de Aletrop é a base dos aviões da companhia aérea PAT. Trata-se de um aeroporto moderno, e de uma empresa de aviação em expansão, que pretende manter a sua competitividade num sector de actividade fortemente concorrencial. O aumento de competitividade passa, nomeadamente, pela realização de dois objectivos, a melhoria da qualidade de serviço e a redução dos custos de operação. Por outro lado, a segurança de uma companhia aérea é um aspecto de primordial importância, estando intimamente ligado à manutenção. Para manter um avião em boas condições técnicas, procede-se à manutenção preventiva aos aparelhos da PAT, através de pequenas inspecções entre aterragem e posterior descolagem. A direcção da empresa está também a considerar a hipótese de oferecer estes serviços de manutenção a outras companhias de aviação, mesmo que para tal tenha que aumentar às equipas de manutenção. O elemento crucial nestas equipas é o chefe de manutenção, técnico altamente qualificado, que necessita de fazer formação específica para cada tipo de avião e obter assim uma licença imprescindível para o desempenho dessas funções. A cada licença corresponde uma categoria de aviões, existindo 4 licenças diferentes:

Tipos de licenças	Aviões
1	Boeing 717 (100 lugares)
2	Boeing 777 (300 a 500 lugares)
3	Airbus A319 (124 lugares)
4	Airbus A340 (350 lugares)

Slide 12

Cada técnico pode ter no máximo 2 licenças. A primeira licença demora vários anos a obter, sendo portanto mais cara para a empresa, enquanto a segunda licença demora menos anos a obter, ficando naturalmente mais barata. O custo da segunda licença depende ainda da licença anterior que o técnico possui. Actualmente existem 9 equipas de manutenção, cada uma chefiada por um técnico licenciado, que funcionam em 3 turnos.

Custo (M$)				
Licença anterior	Licença a tirar			
	1	2	3	4
0	2	4	2	4
1	-	1	2	3
2	1	-	2	3
3	1	3	-	2
4	1	2	1	-

Turno	Chefe de equipa	Tipo de licença
1	1	1, 2
	2	1
	3	2
2	4	3, 4
	5	2
	6	3
3	7	4
	8	3, 4
	9	3

Para poder oferecer serviços a outras companhias de aviação, a empresa pretende que existam 4 licenças de cada tipo, no conjunto dos chefes de manutenção. Isto pode ser conseguido enviando para formação actuais chefes de equipa (portanto técnicos que já possuem 1 licença) ou outros técnicos que ainda não possuem nenhuma licença. No entanto, de cada turno só poderá sair, no máximo, 1 chefe de equipa para formação. Escreva um modelo de programação matemática que permita determinar a política de obtenção de licenças que minimiza os custos para a Aletrop.

Problema de Mistura de Produtos
Resolução

Passo I — O que se desconhece, e que se pretende determinar na fase de resolução do modelo, são as quantidades a produzir diariamente de cada um dos modelos — as variáveis de decisão.

Representando-as algebricamente:

Slide 13

x_A – produção diária do modelo A (nº de unidades)

x_B – produção diária do modelo B (nº de unidades)

x_C – produção diária do modelo A (nº de unidades)

Passo II — Restrições do problema.

Não podemos produzir quantidades infinitas de A, B e C (o que daria um lucro infinito) porque estamos limitados pela matéria-prima (200) e mão-de-obra (150) disponíveis, valores que não podemos exceder.

Então, a mão-de-obra necessária para produzir uma unidade do modelo A (7 horas), vezes o número de unidades do modelo A a produzir (x_A),

mais a mão-de-obra necessária para produzir uma unidade do modelo B (3 horas), vezes o número de unidades do modelo B que se resolva produzir (x_B), mais a mão-de-obra necessária para produzir uma unidade do modelo C (6 horas), vezes o número de unidades do modelo C que se venha a produzir (x_C), não poderão exceder as 150 horas, isto é:

$$7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150$$

Aplicando o mesmo raciocínio à matéria-prima, obter-se-ia:

Slide 14

$$4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200$$

As restrições que faltam ao problema dizem directamente respeito às variáveis de decisão, e são:

$$x_A \geq 0, \; x_B \geq 0, \; x_c \geq 0$$

ou seja, não se podem produzir quantidades negativas.

Passo III — O objectivo do problema é maximizar o lucro total, isto é, o lucro obtido com os 3 modelos. Como cada unidade do modelo A dá um lucro de 4, do modelo B dá 2 e do modelo C dá 3, a função objectivo será:

$$\max \ \text{LUCRO} = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

O modelo do nosso problema será então:

Slide 15

Encontrar os números x_A, x_B e x_C tais que:

$$\max \ \text{LUCRO} = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 7x_A + 3x_B + 6x_C &\leq 150 \\ 4x_A + 4x_B + 5x_C &\leq 200 \\ x_A,\ x_B,\ x_C &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema da refinaria de petróleo
Resolução

Slide 16

Variáveis de decisão

x_1 – nº de ciclos de produção a realizar na unidade antiga

x_2 – nº de ciclos de produção a realizar na unidade nova

Restrições

Crude disponível:

Slide 17

$$\begin{array}{lcccccc}
\text{Tipo A:} & \underbrace{5x_1}_{\substack{\text{gasto na}\\\text{unidade}\\\text{antiga}}} & + & \underbrace{3x_2}_{\substack{\text{gasto na}\\\text{unidade}\\\text{nova}}} & \leq & 1500 \\
\text{Tipo B:} & 7x_1 & + & 9x_2 & \leq & 1900 \\
\text{Tipo C:} & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 1000
\end{array}$$

Contratos assinados:

$$\begin{array}{lcccccc}
\text{Gasolina normal:} & \underbrace{9x_1}_{\substack{\text{produzido}\\\text{na unidade}\\\text{antiga}}} & + & \underbrace{5x_2}_{\substack{\text{produzido}\\\text{na unidade}\\\text{nova}}} & \geq & 500 \\
\text{Gasolina super:} & 7x_1 & + & 9x_2 & \geq & 300
\end{array}$$

E ainda:

$$x_1,\ x_2\ \geq 0$$

Função objectivo

Slide 18

$$\max\ \ \text{LUCRO} = \overbrace{6 \times (\underbrace{\underbrace{9}_{\substack{\text{n}^{\underline{\text{o}}}\text{ de}\\\text{tanques}\\\text{por ciclo}}}\quad \underbrace{x_1}_{\substack{\text{n}^{\underline{\text{o}}}\text{ de}\\\text{ciclos}}}}_{\text{unidade antiga}} + \underbrace{5x_2}_{\text{unidade nova}})}^{\text{gasolina normal}} + \overbrace{9 \times (7x_1 + 9x_2)}^{\text{gasolina super}}$$

Aluguer de espaço num armazém
Resolução

Variáveis de decisão

x_{ij} – espaço a alugar no início do mês i por um período de j meses

Slide 19

Restrições

Que em cada mês esteja alugado pelo menos o espaço necessário:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{(mês 1)} & \sum_{j=1}^{5} x_{1j} & & & & & \geq 1500 \\
\text{(mês 2)} & \sum_{j=2}^{5} x_{1j} & +\sum_{j=1}^{4} x_{2j} & & & & \geq 1000 \\
\text{(mês 3)} & \sum_{j=3}^{5} x_{1j} & +\sum_{j=2}^{4} x_{2j} & +\sum_{j=1}^{3} x_{3j} & & & \geq 2000 \\
\text{(mês 4)} & \sum_{j=4}^{5} x_{1j} & +\sum_{j=3}^{4} x_{2j} & +\sum_{j=2}^{3} x_{3j} & +\sum_{j=1}^{2} x_{4j} & & \geq 500 \\
\text{(mês 5)} & x_{15} & +x_{24} & +x_{33} & +x_{42} & +x_{51} & \geq 2500 \\
 & & & & & x_{ij} & \geq 0 \\
 & & & & {\scriptstyle 1 \leq i \leq 5,} & {\scriptstyle 1 \leq j \leq 6-i} &
\end{array}
$$

Função objectivo

Slide 20

$$
\min \ \text{CUSTO} = \overbrace{2800}^{\substack{\text{custo de alugar} \\ 1\ \text{m}^2\ \text{por 1 mês}}} \ \overbrace{\sum_{i=1}^{5} x_{i1}}^{\substack{\text{espaço alugado} \\ \text{por 1 mês} \\ \text{(no início do mês} \\ \text{1, 2, 3, 4 ou 5)}}} + 4500 \sum_{i=1}^{4} x_{i2} + 6000 \sum_{i=1}^{3} x_{i3}
$$

$$
+ 7300 \sum_{i=1}^{2} x_{i4} + 8400\, x_{15}
$$

Slide 21

A companhia de aviação Benvoa
Resolução

Variáveis de decisão

$$x_c,\, x_m,\, x_l \quad - \quad \text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de aviões de cada tipo a comprar}$$

Restrições

Dinheiro disponível:	$500x_l +$	$3800x_m +$	$2600x_c$	$\leq$	112000
Pilotos disponíveis:	$x_l +$	$x_m +$	x_c	$\leq$	30
Manutenção:	$\frac{5}{3}x_l +$	$\frac{4}{3}x_m +$	x_c	$\leq$	40
Opinião da direcção técnica:		$x_l +$	x_m	$\geq$	x_c
		$x_c +$	x_m	$\geq$	$8x_l$
	$x_c,$	$x_m,$	x_l	$\geq$	0
					e inteiros

Função objectivo

$$\max\ \text{LUCRO} = 310x_l + 230x_m + 200x_c$$

Slide 22

Urbanização
Resolução

a)

Variáveis de decisão

Slide 23

A_{ri}	–	nº de hectares a construir na zona i para fins residenciais
A_{vi}	–	nº de hectares reservados na zona i para área verde
A_{ei}	–	nº de hectares reservados na zona i para equipamentos sociais

Restrições

(i)

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{3} A_{ri} &\geq K \\ A_{ei} &\geq l\, A_{ri}, \quad i = 1,2,3 \\ A_{vi} &\geq m\, A_{ri}, \quad i = 1,2,3 \\ A_{ri},\, A_{vi},\, A_{ei} &\geq 0, \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

Slide 24

(ii)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} A_{ri} &\geq K \\ \textstyle\sum_{i=1}^{3} A_{ei} &\geq l \textstyle\sum_{i=1}^{3} A_{ri}, \quad i = 1,2,3 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{3} A_{vi} &\geq m \textstyle\sum_{i=1}^{3} A_{ri}, \quad i = 1,2,3 \\ A_{ri},\, A_{vi},\, A_{ei} &\geq 0, \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

Nota:

Poder-se-ia ainda introduzir uma restrição referente ao espaço total disponível e que não pode ser ultrapassado. Embora não mencionada explicitamente no enunciado ela é inerente ao problema:

$$A_{ri} + A_{ei} + A_{vi} \quad \leq \quad A_{Z_i}, \; i = 1, 2, 3$$

com A_{Z_i} a representar a área total da zona i.

Slide 25 **Função objectivo**

$$\min \; \sum_{i=1}^{3} (K_{ri}\, A_{ri} + K_{vi}\, A_{vi} + K_{ei}\, A_{ei})$$

b)

O custo da solução óptima em (i) é maior do que o custo da solução óptima em (ii). Como a formulação em (i) é mais restritiva que em (ii) e como ao restringir-se mais um problema nunca se melhora o valor óptimo da função objectivo, a conclusão extrai-se de imediato.

c)

Num modelo de programação matemática em Investigação Operacional a região das soluções admissíveis é obtida pela conjunção das restrições formuladas no modelo. Nesta alínea pretende-se modelizar uma implicação de condições:

$$\sum_{i=1}^{3} A_{ei} \; > \; p \; \Rightarrow \; \sum_{i=1}^{3} A_{vi} \; \geq \; q$$

Slide 26 A implicação de condições é modelizada com o auxílio de uma variável de decisão suplementar e de um majorante para os valores que as condições possam tomar.

Seja $A = A_{Z1} + A_{Z2} + A_{Z3}$ a área total disponível nas 3 zonas. Evidentemente que $\sum_{i=1}^{3} A_{ei} \; \leq \; A$ e $\sum_{i=1}^{3} A_{vi} \; \leq \; A$, ou seja, A é um majorante destes somatórios.

Tomando então uma variável auxiliar inteira binária $\delta \in \{0, 1\}$, a implicação pode ser formulada do seguinte modo:

$$\sum_{i=1}^{3} A_{ei} - p - \delta A \quad \leq \quad 0 \qquad (1)$$

$$
\begin{aligned}
q - \sum_{i=1}^{3} A_{vi} - (1-\delta)A &\leq 0 \qquad (2)\\
\delta &\in \{0,1\} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Para verificarmos que as inequações (1–3) modelizam a implicação de condições devemos relembrar que para que uma implicação $a \Rightarrow b$ seja verdadeira é preciso que se a for verdadeira então b também o seja e que se b for falsa então a também o seja.

Slide 27

De facto, se $\sum_{i=1}^{3} A_{ei} > p$ então para que a restrição (1) se verifique é forçoso que $\delta = 1$. Ora $\delta = 1$ transforma (2) em $\sum_{i=1}^{3} A_{vi} \geq q$, como se pretendia.

Se, por outro lado, $\sum_{i=1}^{3} A_{vi} < q$ então, para que (2) se verifique é forçoso que $\delta = 0$. Com $\delta = 0$ a restrição (1) fica $\sum_{i=1}^{3} A_{ei} \leq p$, como se queria demonstrar.

Nota:

É possível ainda modelizar outras operações lógicas entre condições. Apresentam-se de seguida 3 casos distintos:

1. **Disjunção** (apenas uma de duas restrições está activa)

$$f(x_i) \leq 0 \ \vee \ g(x_i) \leq 0$$

Seja M um número "muito grande" e δ uma variável binária:

$$
\begin{cases}
f(x_i) \leq \delta M\\
g(x_i) \leq (1-\delta)M
\end{cases}
$$

Slide 28

2. **K, de entre N restrições, são verificadas**

$$
\left.
\begin{aligned}
f_1(x_i) &\leq d_1\\
f_2(x_i) &\leq d_2\\
&\vdots\\
f_N(x_i) &\leq d_N
\end{aligned}
\right\}
\begin{cases}
f_1(x_i) \leq d_1 + \delta_1 M\\
f_2(x_i) \leq d_2 + \delta_2 M\\
\quad\vdots\\
f_N(x_i) \leq d_N + \delta_N M\\
\sum_{i=1}^{N} \delta_i = N - K\\
\delta_i \in \{0,1\}\\
M = \infty
\end{cases}
$$

3. **Funções com apenas N valores possíveis**

   $f(x_i) = d_1$ ou d_2 ou ... ou d_N $(f(x_i) \in \{d_1, d_2, \ldots, d_N\})$

Slide 29

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x_i) & = & \sum_{i=1}^{N} \delta_i d_i \\ \sum_{i=1}^{N} \delta_i & = & 1 \\ \delta_i & \in & \{0,1\} \end{array}\right.$$

Fábrica de papel
Resolução

Slide 30

O primeiro passo para a formulação deste problema é determinar de quantas maneiras pode um rolo grande ser cortado. Para além da forma sugerida no enunciado (2 rolos de 200cm, sobrando 40cm de desperdício) podem ainda ser determinados 6 outros "padrões de corte" (ver tabela). As variáveis de decisão (x_1 a x_7) correspondem ao número de vezes que cada padrão de corte é aplicado no corte de um rolo grande. A tabela seguinte apresenta ainda as quantidades pedidas de cada rolo pequeno, assim como o desperdício gerado por cada padrão de corte.

Largura dos rolos	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Nº de rolos pedidos
280	2	1	1	0	0	0	0	30
200	0	1	0	3	2	1	0	60
150	0	0	2	0	1	2	4	48
Desperdício	40	120	20	0	50	100	0	

Slide 31

Exemplificando, $x_3 = 4$ significa que se corta um rolo grande em 1 de 280cm e 2 de 150cm, gerando um desperdício de 20cm, 4 vezes. No total obtém-se 4 rolos de 280cm e 8 de 150cm (e nenhum de 200cm).

As restrições vão estar directamente relacionadas com as quantidades de rolos pequenos que é necessário cortar, uma por cada rolo. Se a cada linha do sistema de inequações corresponde um tipo de rolo pequeno, a cada coluna corresponderá um padrão de corte:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & \geq & 30 \\
 & & x_2 & & & + & 3x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & & & \geq & 60 \\
 & & & & 2x_3 & & & + & x_5 & + & 2x_6 & + & 4x_7 & \geq & 48 \\
 & & & & & & & & & & & & x_i & \geq & 0 \ \forall_{1 \leq i \leq 7}
\end{array}$$

Slide 32

O objectivo do problema é minimizar o desperdício. Assim, a função objectivo deste modelo tomará a forma:

$$\min \ 40x_1 + 120x_2 + 20x_3 + 50x_5 + 100x_6$$

E se as restrições tiverem que ser satisfeitas como igualdades, isto é, e se não forem admitidas sobreproduções? Como é que o modelo deve ser alterado?

Aeroporto Aletrop - Manutenção Resolução

Variáveis de decisão

Slide 33

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se técnico } i \text{ tira licença } j \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

A empresa pretende que existam 4 licenças de cada tipo, num total de 16 licenças. Como, no conjunto dos chefes de manutenção existentes, já existem 12 licenças, são necessárias mais 4 licenças, que no limite poderão ser todas obtidas por técnicos novos. Nesse caso o número máximo de técnicos, índice i na formulação, será igual a 13, 9 já existentes e 4 novos.

Restrições

A empresa pretende que existam 4 licenças de cada tipo, no conjunto dos chefes de manutenção:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{13} \quad x_{i1} &= 2 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{13} \quad x_{i2} &= 1 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{13} \quad x_{i3} &= 0 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{13} \quad x_{i4} &= 1 \end{aligned}$$

Slide 34

Um técnico pode ter no máximo 2 licenças e os técnicos novos só poderão obter nesta fase uma licença:

(esta restrição não vem referida explicitamente no enunciado, no entanto pode-se inferir que não haverá disponibilidade de tempo para que um técnico novo obtenha duas licenças)

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{4} \quad x_{ij} &\leq 1 \quad \forall_{i\in\{2,3,5,6,7,9,10,11,12,13\}} \\ \textstyle\sum_{j=1}^{4} \quad x_{ij} &= 0 \quad \forall_{i\in\{1,4,8\}} \end{aligned}$$

De cada turno só poderá sair, no máximo, 1 chefe de equipa para formação:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} & x_{ij} & \leq & 1 \\ \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=4}^{6} & x_{ij} & \leq & 1 \\ \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=7}^{9} & x_{ij} & \leq & 1 \end{array}$$

Cada técnico só pode obter 1 vez a mesma licença:

Slide 35

$$\begin{array}{cccc} x_{21} = & x_{32} = & x_{52} = & 0 \\ x_{63} = & x_{74} = & x_{93} = & 0 \end{array}$$

Função objectivo

$c_{kj} =$ custo de tirar licença j dado que já se tem licença k

$$\min \sum_{j=1}^{4} \left\{ \sum_{i=10}^{13} c_{0j} x_{ij} + \sum_{i \in \{6,9\}} c_{3j} x_{ij} + \sum_{i \in \{3,5\}} c_{2j} x_{ij} + c_{1j} x_{2j} + c_{4j} x_{7j} \right\}$$

Slide 36

Programação Linear

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Maria Antónia Carravilla
José Fernando Oliveira

Slide 37

Programação Linear
Modelos

Forma geral

$$max/min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeito a:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq b_i & \forall_{i\in\{1,\ldots,p\}} \\
x_j & \geq 0 & \forall_{j\in\{1,\ldots,q\}} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & = b_i & \forall_{i\in\{p+1,\ldots,m\}} \\
x_j & qualquer & \forall_{j\in\{q+1,\ldots,n\}}
\end{array}$$

- x_j - valor da variável de decisão j;
- c_j - contribuição da variável de decisão x_j, por unidade, para a função objectivo;
- z - função objectivo a ser maximizada ou minimizada;
- a_{ij} - quantidade do recurso i gasta por unidade da variável de decisão x_j;
- b_i - disponibilidade do recurso i.

Programação Linear
Modelos

Forma normalizada

Slide 38

$$max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &= b_i \quad \forall_{i \in \{1,\ldots,m\}} \\ x_j &\geq 0 \quad \forall_{j \in \{1,\ldots,n\}} \end{aligned}$$

- lado direito das restrições ≥ 0;
- restrições sob a forma de igualdades;
- variáveis ≥ 0.

Programação Linear
Modelos

Equivalência entre as diversas formas do problema PL

Slide 39

- $minf(X) = -max[-f(X)]$
- $x \leq 0 \rightarrow x = -y,\ y \geq 0$
- $x \in \mathcal{R} \rightarrow x = u - v,\ u \geq 0 \wedge v \geq 0$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i \ s_i \geq 0$ (variável de folga)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \rightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq -b_i \end{cases}$$

Programação Linear - Exemplo

Slide 40

O Sr. Victor Águas, fabricante de renome internacional de barcos a remos e de canoas, pretende determinar as quantidades que deve produzir de cada um dos produtos, para maximizar o lucro da sua actividade industrial. Depois de analisado o problema, foi possível encontrar um modelo onde estivessem reflectidas as restrições mensais em termos de matéria-prima (2000kg de alumínio), de tempo de máquina (300 horas) e de mão de obra (200 horas). O lucro (que se pretende obviamente maximizar) está representado em 10^3\$. As variáveis x_{BR} e x_C, correspondem respectivamente ao número de barcos a remos e ao número de canoas a serem fabricadas. Neste modelo não se exige que x_{BR} e x_C sejam inteiros.

$$max \quad Z = 50x_{BR} + 60x_C$$

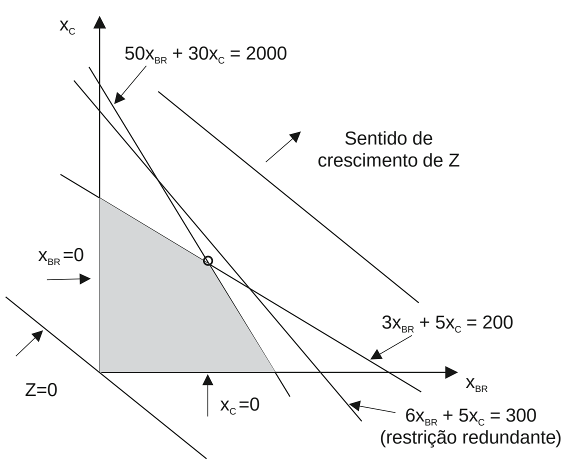
sujeito a:

$$\begin{aligned} 50x_{BR}+ \quad 30x_C &\leq 2000 \\ 6x_{BR}+ \quad 5x_C &\leq 300 \\ 3x_{BR}+ \quad 5x_C &\leq 200 \\ x_{BR}, x_C &\geq 0 \end{aligned}$$

Qual a produção óptima?

Programação Linear - Exemplo Resolução gráfica

Slide 41



Solução óptima:
$x^*_{BR} = 25, x^*_C = 25, Z^* = 2750$

- solução óptima está necessariamente num vértice;
- função objectivo com outro declive (óptimo salta de vértice em vértice);
- função objectivo com mesmo declive que restrição activa (óptimo múltiplo);
- restrição activa com outro declive (valor óptimo altera-se mas não muda de vértice)

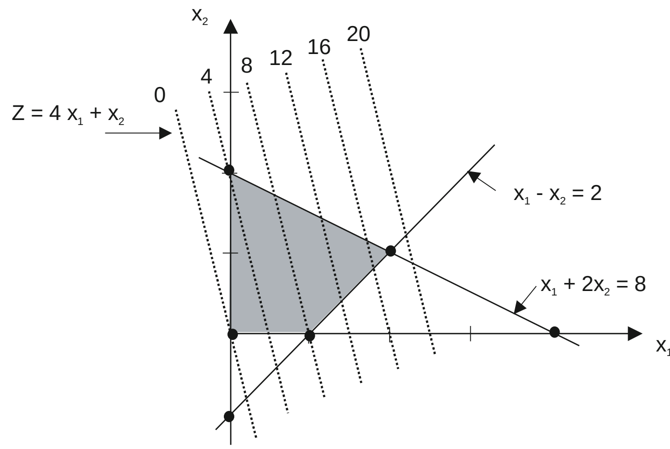
Resolução gráfica de problemas de Programação Linear
Exemplo 1

Slide 42

$max \quad Z = 4x_1 + x_2$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 &\leq 2 \\ x_1 + \quad 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



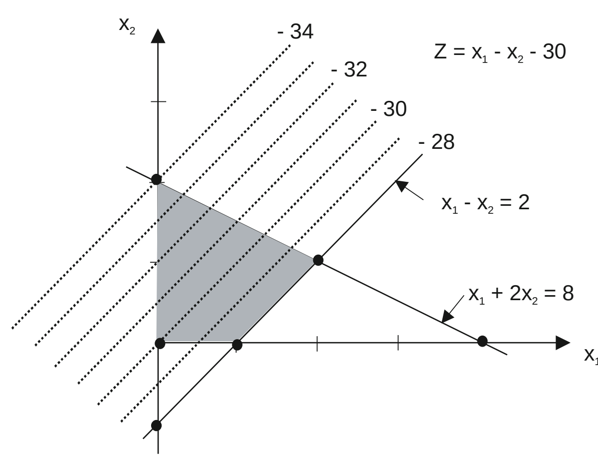
Resolução gráfica de problemas de Programação Linear
Exemplo 2 (solução óptima não única)

Slide 43

$max \quad Z = x_1 - x_2 - 30$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 &\leq 2 \\ x_1 + \quad 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



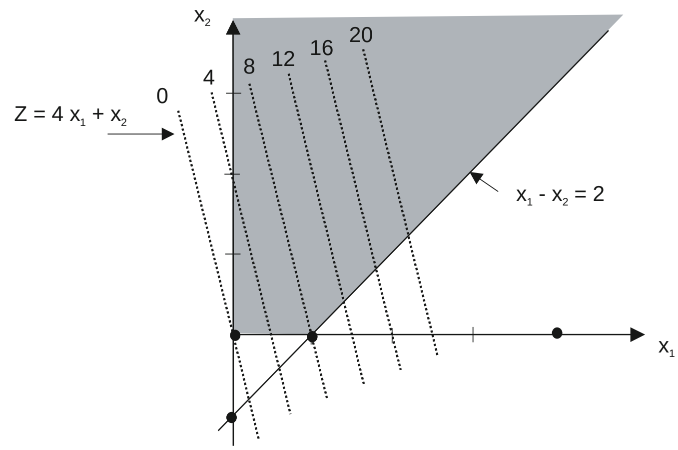
Resolução gráfica de problemas de Programação Linear
Exemplo 3 (solução ilimitada)

Slide 44

$$max \quad Z = 4x_1 + x_2$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 &\leq 2 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica de problemas de Programação Linear
Exemplo 4 (sem solução admissível)

Slide 45

$$max \quad Z$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 &\leq -5 \\ x_1 + \quad 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$