Problemas de Transportes

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Slide 1

José Fernando Oliveira

O problema da distribuição de frigoríficos

Slide 2

Um fabricante de frigoríficos tem 3 fábricas, de onde abastece 3 clientes (distribuidores). No início de cada mês recebe de cada cliente a informação sobre o número de frigoríficos que pretende para esse mês. Esses frigoríficos terão que ser produzidos nas várias fábricas, atendendo à capacidade de produção de cada uma delas. O custo de transportar um frigorífico de cada fábrica para cada cliente é conhecido. O problema consiste em determinar que fábrica(s) deve(m) abastecer cada cliente, e em que quantidades, de forma a que, respeitando as capacidades de produção das fábricas e satisfazendo as necessidades dos clientes, o custo total de transporte seja minimizado. Formule este problema considerando que as capacidades de produção são iguais em todas as fábricas (20 frigoríficos) e que as necessidades dos clientes são de 10, 30 e 20 frigoríficos. Os custos unitários de transporte são os indicados na tabela seguinte (em milhares de escudos):

		Clientes		
		1	*2*	*3*
Fábricas	*1*	2	4	3
	2	1	5	2
	3	1	1	6

Modelo

x_{ij} – quantidade a transportar da fábrica i para o cliente j

$$\min \quad 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + x_{31} + x_{32} + 6x_{33}$$

suj. a:

Slide 3

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & & & & \leq & 20 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & & & & \leq & 20 \\
 & & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & \leq & 20 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & +x_{31} & & & \geq & 10 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & & +x_{32} & & \geq & 30 \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & & & +x_{33} & \geq & 20 \\
x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33} & \geq & 0
\end{array}$$

Estrutura de um Problema de Transportes (PT)

Slide 4

- *origens* onde existe um bem ou serviço *disponível* (em quantidades limitadas);
- *destinos* onde esse bem ou serviço é *necessário*;
- existem, e são conhecidos, *custos unitários de "transportar"* entre cada origem e cada destino;
- o objectivo é determinar a política óptima de transportes, isto é, aquela que satisfazendo as necessidades e respeitando as disponibilidades, *minimiza o custo total de transporte.*

Modelo do PT

x_{ij} – quantidade a transportar da origem i para o destino j;

c_{ij} – custo de transportar uma unidade da origem i para o destino j;

d_i – disponibilidade na origem i;

n_j – necessidade no destino j.

Slide 5

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

suj. a:

$$\begin{aligned} \sum_j x_{ij} &\leq d_i, \forall_i && \text{(restrições da oferta)} \\ \sum_i x_{ij} &\geq n_j, \forall_j && \text{(restrições de procura)} \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

Distribuição de frigoríficos – a rede de transportes

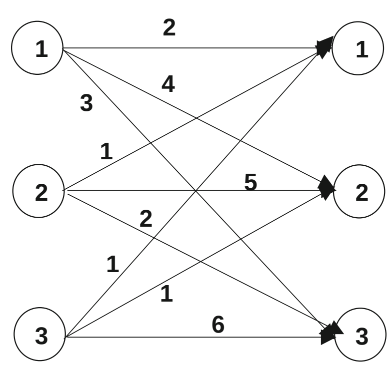
Slide 6

Disponibilidades | Origens | Destinos | Necessidades

$d_1 = 20$ | $n_1 = 10$

$d_2 = 20$ | $n_2 = 30$

$d_3 = 20$ | $n_3 = 20$



$\sum_i d_i = 60$

Disponibilidades totais

$=$

$\sum_j n_j = 60$

Procura total

$\boxed{\text{Problema na forma “standard”}}$

Forma “standard” de um PT

$$\boxed{\sum \text{oferta} = \sum \text{procura}}$$

$$\Updownarrow$$

Tudo o que está nas origens é transportado para os destinos.

$$\Downarrow$$

As restrições são satisfeitas nas igualdades.

Slide 7 Somando

- as equações das restrições da oferta
- as equações das restrições da procura

*o*btém-se a mesma equação!

$$\sum_i \sum_j x_{ij} = \boxed{\sum_i d_i} \searrow$$

iguais

$$\sum_j \sum_i x_{ij} = \boxed{\sum_j n_j} \nearrow$$

— Equações linearmente dependentes $\longrightarrow$ há uma equação a mais

Conclusão: Num PT na forma “standard” só é necessário considerar $\boxed{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de origens} + \text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de destinos -1}}$ equações.

Resolução de um PT

- modelo de PT é um modelo de PL $\Rightarrow$ método Simplex;
- são problemas com uma estrutura particular $\Rightarrow$ desenvolvimento de um algoritmo específico, que tira partido dessas particularidades, baseado no Simplex e noutros conceitos de PL avançada.

Slide 8 Quadro para o algoritmo de transportes

		Destinos			
		1	2	3	
Origens	1	2	4	3	20
	2	1	5	2	20
	3	1	1	6	20
		10	30	20	

$\Leftrightarrow$ Formulação como um PT

Geração de uma solução inicial (i)

Regra dos custos mínimos

Slide 9

— 2	10 4	10 3	~~20~~ ~~10~~ 0
10 1	— 5	10 2	~~20~~ ~~10~~ 0
— 1	20 1	— 6	~~20~~ 0
~~10~~ 0	~~30~~ ~~10~~ 0	~~20~~ ~~10~~ 0	

Geração de uma solução inicial (ii)

Regra do canto NW

Slide 10

10 2	10 4	— 3	~~20~~ ~~10~~ 0
— 1	20 5	— 2	~~20~~ 0
— 1	— 1	20 6	~~20~~ 0
~~10~~ 0	~~30~~ ~~20~~ 0	~~20~~ 0	

Soluções iniciais (básicas) degeneradas

Slide 11

10 2	**10** 4	**--** 3
-- 1	**20** 5	**--** 2
-- 1	**--** 1	**20** 6

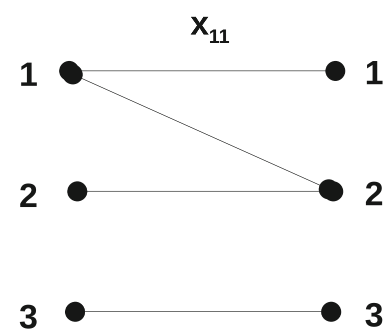
Regra para escolha da variável nula que será considerada básica:

> *O grafo representativo das variáveis básicas terá que ser uma árvore e conexo*

Logo, poderemos tomar x_{13}, x_{23}, x_{31} ou x_{32}, mas **não** x_{21}.

- Apenas 4 variáveis diferentes de zero.
- n + m - 1 = 5 variáveis básicas necessárias.

Logo, teremos que "promover" uma variável nula a básica. (Solução básica degenerada)



Algoritmo de transportes (i)

Slide 12

1 – Cálculo dos custos marginais

Para cada variável básica x_{ij} definem-se dois custos (os custos marginais) que somados dão o custo unitário de transporte dessa variável básica, c_{ij}.

O custo de transportar uma unidade de i para j pode ser entendido como a soma de 2 custos:

- u_i (custo de despacho em i)
- v_j (custo de recepção em j)

É necessário arbitrar um destes custos para uma das variáveis básicas (normalmente arbitra-se 0 para o custo do canto superior esquerdo).

	0	**2**	**1**
2	**10** 2	**10** 4	**0** 3
3	**--** 1	**20** 5	**--** 2
5	**--** 1	**--** 1	**20** 6

Algoritmo de transportes (ii)

2 – Cálculo das diferenças

Para todas as variáveis *não básicas* calcula-se um $\Delta_{ij} = c_{ij} - [u_i + v_j]$. Entrará na base a variável não básica com Δ_{ij} mais negativo (problema de minimização).

Slide 13

Ao entrar na base esta variável deixa de valer 0 passando a valer Θ, positivo. O valor das variáveis básicas altera-se de forma a respeitarem-se disponibilidades e necessidades. O valor de Θ será tal que nenhuma variável venha negativa.

	0	2	1
2	10 2	10 4	0 3
3	-- -2 1	20 5	-- -2 2
5	-- -4 1	-- -6 1	20 6

–

	0	2	1
2	10 2	10-θ 4	0+ θ 3
3	-- -2 1	20 5	-- -2 2
5	-- -4 1	θ -6 1	20 - θ 6

θ = 10

Continuando a resolver...

Slide 14

	0	-4	1
2	10-θ 2	-- 6 4	10+θ 3
9	θ -8 1	20-θ 5	-- -8 2
5	-- -4 1	10+θ 1	10 - θ 6

θ = 10

	0	4	1
2	0-θ 2	θ -2 4	20 3
1	10+θ 1	10-θ 5	-- 0 2
-3	-- 4 1	20 1	-- 8 6

θ = 0

	0	4	3
0	-- 2 2	0+θ 4	20 –θ 3
1	10 1	10-θ 5	θ -2 2
-3	-- 4 1	20 1	-- 6 6

θ = 10

	0	2	1
2	-- 0 2	10 4	10 3
1	10 1	-- 2 5	10 2
-1	-- 2 1	20 1	-- 6 6

Solução óptima

$x_{12} = 10$, $x_{13} = 10$, $x_{21} = 10$, $x_{23} = 10$, $x_{32} = 20$

Custo óptimo =

$10 \times 4 + 10 \times 3 + 10 \times 1 + 10 \times 2 + 20 \times 1 = 120$

Exemplo

Slide 15

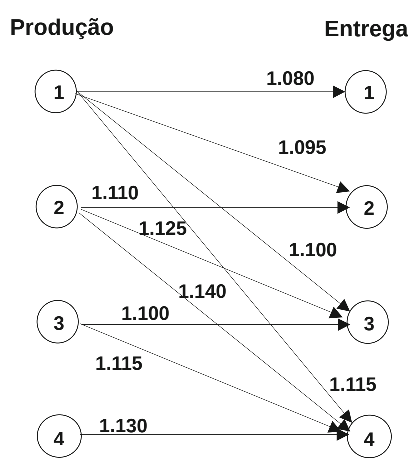
Uma companhia construtora de aviões pretende planear a produção de um motor, para os próximos 4 meses. Para satisfazer as datas de entrega contratuais necessita de fornecer os motores nas quantidades indicadas na segunda coluna do quadro. O número máximo de motores que a companhia produz por mês, bem como o custo de cada motor (em milhões de dólares) são dados na terceira e quarta colunas do referido quadro. Dadas as variações nos custos de produção, pode valer a pena produzir alguns motores um ou mais meses antes das datas programadas para entrega. Se se optar por esta hipótese, os motores serão armazenados até ao mês de entrega, com um custo adicional de 0.015 milhões de dólares/mês.

Mês	Quantidades a entregar	Produção máxima	Custo unitário de produção	Custo unitário de armazenagem
1	10	25	1.08	—
2	15	35	1.11	0.015
3	25	30	1.10	0.015
4	20	10	1.13	0.015

O director de produção quer saber quantos motores deve fabricar em cada mês (e para que meses de entrega) por forma a minimizar os custos globais de produção e armazenagem. Formule o problema como um problema de transportes.

Resolução

Slide 16



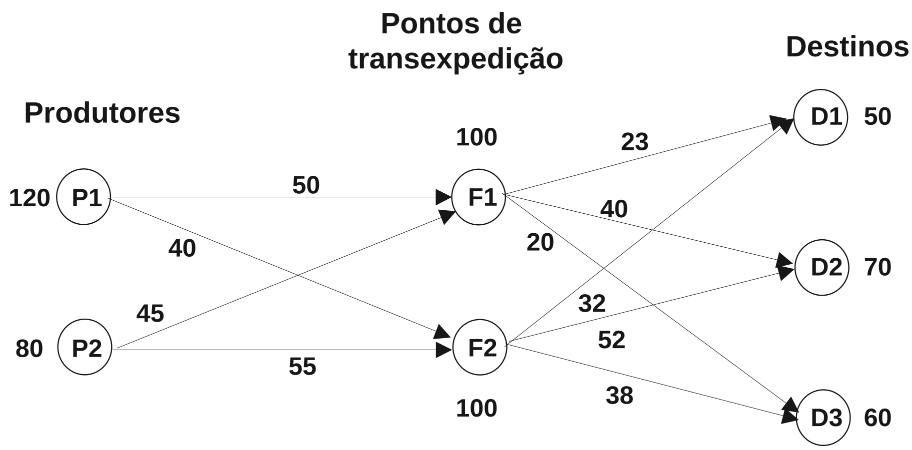
Mês de entrega

Mês de produção	1	2	3	4	x	
1	1.080	1.095	1.110	1.125	0	25
2	∞	1.110	1.125	1.140	0	35
3	∞	∞	1.100	1.115	0	30
4	∞	∞	∞	1.130	0	10
	10	15	25	20	30 /100	100

Problemas de transexpedição

Slide 17

Exemplo: Problemas de transexpedição (extensão do PT)



Questões adicionais: — Restrições de capacidade nas fronteiras (pontos de transexpedição) — Equilíbrio de fluxos

Formulação de um problema de transexpedição como um PT'

Slide 18

	D1	D2	D3	F1	F2	X	
P1	∞	∞	∞	50	40	0	120
P2	∞	∞	∞	45	55	0	80
F1	23	40	20	0	∞	∞	100
F2	34	52	38	∞	0	∞	100
	50	70	60	100	100	20	

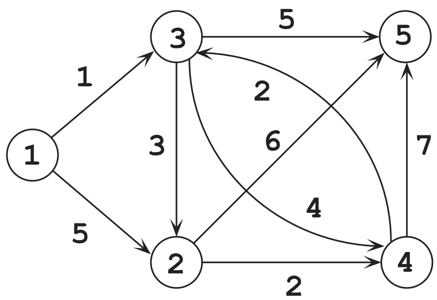
Notas:

- o que é transportado de um ponto de transexpedição para si próprio representa a capacidade de transexpedição não usada;
- caso a capacidade dos pontos de transexpedição seja infinita, deve-se usar o valor do somatório da procura ou da oferta.

Formulação de problemas de fluxos em redes genéricas

Slide 19

Exemplo



Nó		
1	Disponibilidade =	50
2	Necessidade =	40
3	Intermédio	
4	Disponibilidade =	10
5	Necessidade =	20

Restrições:

Nós fornecedores: Fluxo que entra + Disponibilidades = Fluxo que sai

Nós consumidores: Fluxo que entra - Necessidades = Fluxo que sai

Nós intermédios: Fluxo que entra = Fluxo que sai

Modelo de PL para problemas de fluxos em redes genéricas

Slide 20

x_{ij} – fluxos nos ramos

$$\min 5x_{12} + x_{13} + 2x_{24} + 6x_{25} + 3x_{32} + 4x_{34} + 5x_{35} + 2x_{43} + 7x_{45}$$

suj. a:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrcr}
x_{12} & +x_{13} & & & & & & & & = & 50 \\
-x_{12} & & +x_{24} & +x_{25} & -x_{32} & & & & & = & -40 \\
 & -x_{13} & & & +x_{32} & +x_{34} & +x_{35} & -x_{43} & & = & 0 \\
 & & -x_{24} & & & -x_{34} & & +x_{43} & +x_{45} & = & 10 \\
 & & & -x_{25} & & & -x_{35} & & -x_{45} & = & -20 \\
 & & & & & & & & x_{ij} & \geq & 0, \forall_{i,j}
\end{array}$$

$\boxed{\text{1 equação redundante!}}$

Problemas de Afectação

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Slide 21

José Fernando Oliveira

Problemas de Afectação (PA)

Exemplo típico: Afectação de n pessoas a n tarefas.

Dados: Tempo que cada pessoa demora a executar cada tarefa.

Objectivo: Minimizar o tempo total.

Modelo:

Slide 22

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

suj. a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1, \qquad i = 1 \ldots n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1, \qquad j = 1 \ldots n \\ x_{ij} &\in \{0,1\}, \qquad \forall_{i,j} \end{aligned}$$

Caso particular de um PT em que:

$$\begin{aligned} d_i &= 1, \qquad \forall_i \\ n_j &= 1, \qquad \forall_j \end{aligned}$$

Resolução do PA

Método Húngaro – Deve-se ao matemático húngaro König.

Pressupostos:

- $c_{ij} \geq 0$
- problema de minimização

Slide 23

Quadro de resolução:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	10	9	8	7
M_2	3	4	5	6
M_3	2	1	1	2
M_4	4	3	5	6

Se fosse possível identificar uma afectação de custo nulo no quadro de resolução então, dentro dos pressupostos enunciados, essa solução seria óptima.

O método húngaro vai operar sucessivas transformações sobre o quadro, transformando-o em quadros equivalentes (com as mesmas soluções) mas com mais zeros, até que seja evidente uma solução de custo nulo. No fim basta reproduzir essa solução sobre o quadro inicial para termos o custo real da afectação.

Justificação do método húngaro

Princípio de funcionamento: Somar ou subtrair uma constante a uma linha ou a uma coluna da matriz dos custos de afectação (problema na forma "standard"), não altera a afectação óptima (embora altere o seu custo).

Justificação: Se, por hipótese, se reduzem todos os custos da linha 1 de k, a função objectivo do PA fica

Slide 24

$$\min \sum_{j=1}^{n} (c_{1j} - k)x_{1j} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - k \sum_{j=1}^{n} x_{1j}$$

Como $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ a nova função objectivo só difere da anterior da constante k, logo, a solução óptima do respectivo programa linear não é afectada.

Algoritmo de aplicação do método húngaro

Slide 25

Metodologia: Subtrair custos suficientemente elevados às várias linhas e colunas de modo a que a afectação óptima seja encontrada por inspecção.

Algoritmo:

1. subtrair a cada linha o menor elemento dessa linha;
2. subtrair a cada coluna o menor elemento dessa coluna;
3. riscar as linhas e colunas em que algum dos elementos vale zero, começando pelas que apresentam maior número de zeros;
4. se o número de linhas e colunas riscadas for igual a n (número de itens a afectar), encontrou-se a afectação óptima: ela é constituída por n zeros **independentes**;
5. senão, selecciona-se o menor elemento não riscado e subtrai-se a todos os elementos não riscados e adiciona-se a todos os elementos riscados duas vezes. Volta-se ao ponto 3.

Layout fabril

Slide 26

Uma fábrica possui 4 locais (1,2,3,4) para receber 3 máquinas novas (A,B,C). O local 4 é demasiado pequeno para conter a máquina A. O custo de manipulação dos materiais que são processados nas máquinas, em centenas de escudos/hora, envolvendo cada máquina e as respectivas posições, é o seguinte:

	1	2	3	4
A	5	1	3	X
B	3	1	4	3
C	3	3	4	2

O objectivo é determinar que local ocupará cada uma das novas máquinas, de forma a minimizar o custo total de manipulação dos materiais.

Resolução do problema de layout fabril

Slide 27

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 5 & 1 & 3 & \infty \\ B & 3 & 1 & 4 & 3 \\ C & 3 & 3 & 4 & 2 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 4 & 0 & 2 & \infty \\ B & 2 & 0 & 3 & \boxed{2} \\ C & 1 & 1 & 2 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

3 riscos < 4

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 2 & \boxed{0} & 0 & \infty \\ B & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 \\ C & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ F & 0 & 2 & \boxed{0} & 0 \\ \hline \end{array}$$

4 riscos

Solução óptima

Soluções óptimas:
{A2, B1, C4, F3}
ou
{A3, B2, C4, F1}
Custo: 6

Asa de Luxo Lda.

Slide 28

A empresa de transportes Asa de Luxo comprou 3 novos pequenos aviões. Após um estudo de mercado foram identificados 4 possíveis destinos para os novos voos a estabelecer: Monte Carlo, Ilhas Canárias, Biarritz e as Ilhas Gregas. Para cada um dos destinos foi estimado o lucro que cada avião proporcionaria:

Destino	A_1	A_2	A_3
Monte Carlo	8	11	10
Ilhas Canárias	10	9	9
Biarritz	9	4	8
Ilhas Gregas	6	7	5

(lucros em M$)

Numa reunião, o administrador da Asa de Luxo (que possui um apartamento em Biarritz) decidiu que Biarritz seria necessariamente o destino de um dos 3 aviões. Por outro lado, o Director de Marketing considerou que, por uma questão de estratégia, se deveria atingir o maior número possível de destinos, não enviando mais do que um avião para cada destino. O responsável pela manutenção chamou a atenção para o facto de os aviões A_1 e A_3 não poderem aterrar nas Ilhas Gregas.

Decida que avião deve seguir para cada destino e ganhe uma viagem grátis para um destino à sua escolha (oferecida pela Asa de Luxo, obviamente!)

Slide 29

Resolução do problema da Asa de Luxo Lda.

Problema de **maximização** $\Rightarrow$ calcular o complemento para o máximo (neste caso 11) de todos os elementos da matriz e resolver o problema como se fosse de minimização.

$$\begin{array}{c|cccc|} & MC & IC & B & IG \\ \hline A_1 & 8 & 10 & 9 & 6 \\ A_2 & \boxed{11} & 9 & 4 & 7 \\ A_3 & 10 & 9 & 8 & 5 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|} & MC & IC & B & IG \\ \hline A_1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ A_2 & 0 & 2 & 7 & 4 \\ A_3 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ F & 11 & 11 & 11 & 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|} & MC & IC & B & IG \\ \hline A_1 & 3 & 1 & 2 & \infty \\ A_2 & 0 & 2 & 7 & 4 \\ A_3 & 1 & 2 & 3 & \infty \\ F & 11 & 11 & \infty & 11 \\ \hline \end{array} \qquad \cdots$$

Bibliografia

- Ferreira, José António Soeiro (1995). *Apontamentos de Investigação Operacional 1.* FEUP.
- Guimarães, Rui Campos (1979). *Metodologia da Investigação Operacional.* FEUP.
- Guimarães, Rui Campos (1983). *Introdução à Programação Linear.* FEUP.
- Guimarães, Rui Campos (1984). *Planeamento e Controle de Projectos: Método CPM e extensões.* FEUP.
- Hillier, Fraderick S. e Lieberman, Gerald (1995). *Introduction to Operations Research*, Mc Graw-Hill.
- Oliveira, José Fernando (1996). *Apontamentos de Investigação Operacional 1.* FEUP.

Slide 30

- Ravindram, Philips e Solberg (1987). *Operations Research, Principles and Practice.* John Wiley & Sons.
- Taha, Hamdy A. (1997). *Operations Research, an Introduction.* Prentice Hall.
- Tavares, L. V., Oliveira, R. C., Themido, I. H., Correia, F. N. (1997). *Investigação Operacional.* Mc Graw-Hill.

Slide 31