Capítulo 1

Exercícios de Formulação Enunciados

Problema 1

"Publicações Polémicas" vai publicar uma autobiografia de um político controverso, e admite que a 1ª edição vai ser vendida por completo se não houver atrasos. Foi decidido que versões de Luxo (L) e Normal (N) vão aparecer simultaneamente e são conhecidas as seguintes condicionantes do projecto:

(a) O departamento de impressão pode produzir no máximo 10000 cópias (incluindo versões L e N).

(b) O departamento de encadernação pode concluir 12000 cópias N ou 8000 cópias L se trabalhar em cada um destes tipos isoladamente. Se produzir as duas versões, pode produzir proporções daquelas quantidades que totalizem 1.

(c) O armazém pode despachar um máximo de 15000 cópias N ou 9000 cópias L, ou proporções que totalizem 1.

(d) Já existem pedidos de 2000 versões N e 1000 versões L, que deverão ser satisfeitos na 1ª edição.

(e) Pelo menos $\frac{1}{4}$ do total das cópias deverá ser em versão de Luxo (L).

O lucro resultante da venda de uma cópia N é de 600$00 e de uma cópia L é de 720$00. "Publicações Polémicas" pretende saber qual o número de cópias de cada tipo a produzir de modo a obter o maior lucro possível.

(a) Formule este problema como Programação Linear.

(b) Resolva-o graficamente, ilustrando o conjunto das soluções admissíveis.

(c) Resolva pelo método Simplex uma versão simplificada do problema, em que não se consideram as condições (d) e (e).

Qual o significado que atribui ao valor das variáveis de folga?

A solução obtida será a solução óptima do problema inicial?

(d) Substitua a condição (e) pela seguinte:

Se houver produção de cópias na versão L então o seu número deverá ser superior a 2000.

Como incluiria esta condição no modelo formulado, mantendo a sua estrutura linear (inteira)?

Justifique.

Problema 2

Considere o seguinte Problema de Distribuição que consiste na determinação de uma estratégia óptima de distribuição que satisfaça a procura e, ao mesmo tempo, respeite as capacidades e limitações existentes:

Uma empresa tem duas fábricas e quatro armazéns e vende produtos a seis clientes que podem ser abastecidos a partir dos armazéns ou directamente das fábricas. A empresa suporta os custos de distribuição apresentados nas tabelas 1 e 2. Os traços indicam que a entrega correspondente não se realiza.

	Origens	
Destinos *Armazéns*	Bragança (fábrica)	Évora (fábrica)
Coimbra	0.5	—
Faro	1.0	0.2
Lisboa	0.8	0.6
Porto	0.4	0.8

Tabela 1: Custos de distribuição (em 1000$ por ton.)

	Origens					
Destinos *Clientes*	Bragança (fábrica)	Évora (fábrica)	Coimbra (armazém)	Faro (armazém)	Lisboa (armazém)	Porto (armazém)
C1	1.0	2.0	—	1.0	—	—
C2	—	—	1.5	0.5	1.5	—
C3	1.5	—	0.5	0.5	2.0	0.2
C4	2.0	—	1.5	1.0	—	1.5
C5	—	—	—	0.5	0.5	0.5
C6	1.0	—	1.0	—	1.5	1.5

Tabela 2: Custos de distribuição (em 1000$ por ton.)

Nas tabelas 3 e 4 estão representadas as capacidades mensais máximas das fábricas e dos armazéns. Na tabela 5, apresenta-se a procura típica mensal dos clientes.

Fábrica	Capacidade (toneladas)
Bragança	150 000
Évora	200 000

Tabela 3: Capacidade máxima mensal de produção das fábricas

O objectivo da empresa é a determinação dum plano óptimo de distribuição que minimize os custos em questão.

Construa um modelo de Programação Linear para este problema.

Armazém	Capacidade (toneladas)
Coimbra	70 000
Faro	50 000
Lisboa	100 000
Porto	40 000

Tabela 4: Capacidade máxima mensal de fornecimento dos armazéns

Cliente	Procura mensal (toneladas)
C1	50 000
C2	10 000
C3	40 000
C4	35 000
C5	60 000
C6	20 000

Tabela 5: Procura típica mensal dos clientes

Problema 3

Um produto em fabrico resulta duma montagem constituída por duas peças, **A** e **B**. Para a elaboração dessas peças recorre-se a uma máquina **M1** e a cinco máquinas **M2**. A produtividade de cada máquina relativamente às duas peças é a indicada na tabela 1:

Peça	**M1**	**M2**
A	3	20
B	5	15

Tabela 1: Tempo de produção (em minutos por peça) das peças **A** e **B** nas máquinas **M1** e **M2**

A carga das máquinas **M2** é repartida igualmente pelas 5 máquinas. O objectivo do problema é saber como se pode obter o máximo de montagens completas por dia. Considere que um dia corresponde a 8 horas de trabalho.

(a) Apresente um modelo matemático para este problema.

(b) Considere agora a situação em que também se pretende manter uma utilização equilibrada entre as máquinas de modo que nenhuma delas seja utilizada mais 30 minutos por dia do que qualquer outra das máquinas.

Será possível resolver este novo problema por Programação Linear? Justifique.

Problema 4

Formule o seguinte problema como um problema de Programação Linear:

Com vista à organização de um hospital consideram-se as seguintes condições:

(a) há n classes de doentes, com $i = 1, 2, \dots, n$, designando cada classe;

(b) cada classe é dividida em doentes que pagam e doentes que não pagam;

(c) cada doente da classe i requer r_{ij} unidades de serviço tipo j, $j = 1, 2, \dots, m$;

(d) cada unidade de serviço j requer a_{kj} unidades de recurso tipo k, $k = 1, 2, \dots, l$;

(e) para um dado período de tempo existem t_k unidades disponíveis do recurso k;

(f) há um limite superior u_i, sobre o número de doentes na classe i, a serem tratados;

(g) bem como um limite inferior l_i, no número de doentes na classe i, a serem tratados;

(h) por outro lado, a proporção de doentes que não pagam, da classe i, não será superior a v_i;

(i) os doentes que pagam, pagarão p_j por cada unidade de serviço tipo j;

(j) é c_k o custo unitário do recurso tipo k;

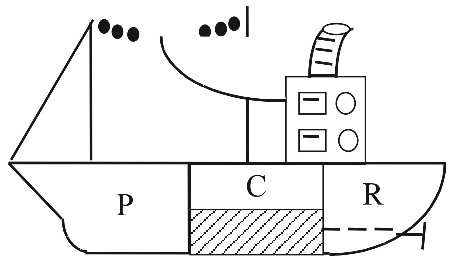
(k) há custos fixos e subsídios, a e b, respectivamente;

(l) exige-se um nível mínimo, e, para o lucro;

(m) atribui-se um peso w_i a cada classe de doentes i, que reflecte a importância dessa classe para o hospital;

(n) o objectivo é maximizar a soma pesada de todos os doentes tratados, respeitando as restrições indicadas.

Problema 5



Uma companhia de navegação possui um navio com 3 porões de carga (à proa, à ré e ao centro) possuindo os limites de capacidade apresentados na tabela 1:

Porão	Tonelagem (toneladas)	Volume (m^3)
Proa	2000	100000
Centro	3200	14000
Ré	1800	80000

Tabela 1: Limites de capacidade (em tonelagem e em volume) de cada um dos porões

À empresa são oferecidas as cargas da tabela 2, cada uma das quais pode ser aceite parcial ou totalmente:

Carga	Peso (toneladas)	Volume por tonelada $(\frac{m^3}{tonelada})$	Lucro $(\frac{escudos}{tonelada})$
A	7000	60	20
B	6500	50	24
C	4000	25	16

Tabela 2: Peso, volume e lucro associados a cada carga

A fim de preservar o equilíbrio do navio, deve manter-se a proporção entre o peso em cada porão e o volume respectivo. Admita que em cada porão podem ser transportadas partes de cargas diferentes. Pretende-se maximizar o lucro da empresa, relativo à utilização deste navio.

Construa um modelo de Programação Linear para o problema apresentado.

Problema 6

Duas fábricas, **A** e **B**, situadas em locais diferentes produzem ambas os produtos P_1 e P_2. A fábrica **A** tem 3 máquinas e a fábrica **B** tem 2 máquinas. Todas as máquinas fazem os produtos P_1 e P_2. Depois de fabricados, os produtos podem ser transportados entre as fábricas de modo a satisfazer a procura. O número de unidades produzidas por dia, os custos de produção e de transporte, a procura dos produtos e o número de dias em que cada máquina está disponível por mês estão indicados nas tabelas 1 e 2.

(a) Apresente um modelo geral (usando variáveis indexadas e coeficientes convenientes a definir) que permita determinar os esquemas de utilização das máquinas em cada fábrica e de distribuição dos produtos entre as fábricas, a que corresponda um custo total mínimo.

(b) Concretize o modelo para o caso descrito.

(c) Refira-se à resolução do problema em questão.

Fábrica	**A**						**B**			
Máquina	$\mathbf{M_1}$		$\mathbf{M_2}$		$\mathbf{M_3}$		$\mathbf{M_1}$		$\mathbf{M_2}$	
Disponibilidade (dias)	30		28		24		26		28	
Produto	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2
Produção por dia	40	35	42	38	40	37	41	37	42	40
Custo por dia	100	102	104	106	98	104	102	105	103	106

Tabela 1: Capacidades de produção das fábricas

Produto	P_1		P_2	
Fábrica	**A**	**B**	**A**	**B**
Procura	1200	800	1500	1100
Custo de transporte por unidade	**A**→ **B** = 4	**B**→ **A** = 4	**A**→ **B** = 3	**B**→ **A** = 4

Tabela 2: Procura e custos de transporte dos produtos

Problema 7

A Superboa tem 3 fábricas de cerveja e 10 pontos principais de distribuição.

Em cada mês a fábrica i produz no máximo a_i kl de cerveja em regime normal, com um custo $r_i \frac{contos}{kl}$, $i = 1, 2, 3$. Qualquer fábrica também pode trabalhar em regime extraordinário, produzindo nessa situação um máximo de b_i kl com um custo $s_i \frac{contos}{kl}$, com $s_i > r_i$.

O custo de transporte da fábrica i para o posto j, $j = 1, \ldots, 10$ é de $c_{ij} \frac{contos}{kl}$. Toda a cerveja produzida num dado mês pode ser transportada, no mesmo mês, para os postos de distribuição.

No posto j a procura é de d_j kl. A procura poderá não ser satisfeita, contudo, cada kl distribuído no posto j rende α_j *contos* e cada kl que fique por distribuir penaliza a empresa em β_j *contos*.

Se a quantidade de cerveja transportada para o posto j exceder a procura nesse posto, o excesso pode ser vendido para um armazém ao preço de $\delta_j \frac{contos}{kl}$, com $\gamma_j < \alpha_j$, em quantidades ilimitadas.

(a) Apresente um modelo matemático para o problema da determinação da estratégia óptima mensal de produção, transporte e venda da empresa.

(b) Refira-se ao tipo de modelo que apresentou.

Problema 8

Edmundo Terra, agricultor de corpo e alma, está entusiasmado em alargar a sua actividade. Poderá arrendar terra até um máximo de $400ha$. Pagará $15\frac{Euro}{ha \times ano}$, se arrendar até $240ha$. Terra acima dos $240ha$ também pode ser arrendada mas a $25\frac{Euro}{ha \times ano}$. A actividade principal em vista é a cultura de cereais, podendo proceder em regime normal ou em regime intensivo (mais fertilizantes, irrigações frequentes, etc). Em regime normal poderá conseguir $2.8\frac{kl}{ha}$ e em regime intensivo $4.0\frac{kl}{ha}$. Haverá que considerar os recursos necessários indicados na tabela 1.

Recursos necessários	Regime normal	Regime intensivo
Mão-de-obra ($\frac{pessoa \times hora}{ha \times ano}$)	5	7
Materiais (Sementes, fertilizantes, água, ...) ($\frac{Euro}{ha \times ano}$)	50	90

Tabela 1: Recursos necessários em cada um dos regimes de cultura

A colheita requer $12.5\frac{pessoa \times hora}{kl}$. O cereal pode ser vendido por $62.5\frac{Euro}{kl}$, em mercado grossista. Edmundo Terra também poderá criar aves (galinhas, ...), considerando-se como medida de produção a unidade de criação. Para 1 unidade de criação são necessários $1kl$ de cereal, $20 pessoa \times hora$ de trabalho e $4m^2$ de chão coberto. Pode utilizar o cereal que produz ou comprá-lo no mercado a retalho, ao preço de 87.5 Euro por kl. Cada unidade de criação pode ser vendida por 175 $Euro$, em mercado grossista, até ao máximo de 200 unidades. Acima de 200 unidades a venda será por 160 $Euro$. Dispõe apenas de um espaço coberto de $1350m^2$ que poderá usar para a criação de aves. Ele e a família poderão contribuir com 4000 $pessoa \times hora$ de trabalho por ano, sem custo. Caso precise de mais mão-de-obra poderá contratá-la ao custo de $4\frac{Euro}{pessoa \times hora}$, até $3000 pessoa \times hora$. Contratações acima deste limite custarão $7\frac{Euro}{pessoa \times hora}$. Embora o seu amor à terra seja grande, está naturalmente preocupado com os resultados, esperando maximizar os seus ganhos líquidos.

Contribua com um modelo de optimização, para o plano a seguir por Edmundo Terra.

Capítulo 1

Exercícios de Formulação Resoluções

Problema 1

(a) Definam-se as seguintes variáveis de decisão:

x_L quantidade de livros a produzir na versão Luxo;

x_N quantidade de livros a produzir na versão Normal.

Com essas variáveis de decisão o modelo de Programação Linear será o seguinte:

Objectivo:

$$\max \quad Z = 600x_N + 720x_L \tag{1.1}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
x_N + x_L &\leq 10000 && (1.2)\\
\frac{x_N}{12000} + \frac{x_L}{8000} &\leq 1 && (1.3)\\
\frac{x_N}{15000} + \frac{x_L}{9000} &\leq 1 && (1.4)\\
\frac{1}{4}(x_N + x_L) &\leq x_L && (1.5)\\
x_N &\geq 2000 && (1.6)\\
x_L &\geq 1000 && (1.7)
\end{aligned}$$

A restrição (1.2) é devida à condicionante referida no ponto (a) do problema. As restrições (1.3) e (1.4) são devidas às condicionantes referidas nos pontos (b) e (c) do problema. A restrição (1.5) é devida à condicionante referida no ponto (e) do problema. Por último, as restrições (1.6) e (1.7) representam a condicionante referida na alínea (d).

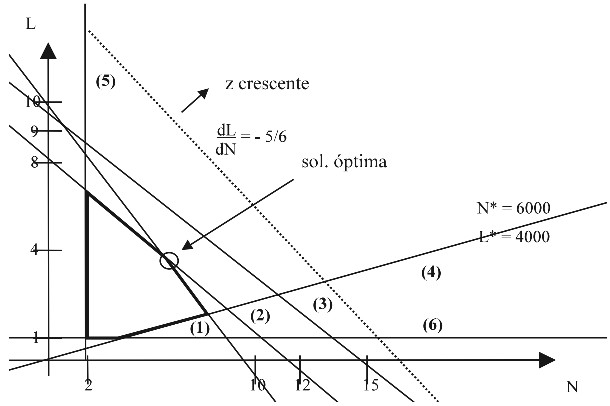
O modelo apresentado é equivalente ao seguinte modelo:

$$\max \quad Z = 600x_N + 720x_L \tag{1.8}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
x_N + x_L &\leq 10000 && (1.9)\\
2x_N + 3x_L &\leq 24000 && (1.10)\\
3x_N + 5x_L &\leq 45000 && (1.11)\\
x_N - 3x_L &\leq 0 && (1.12)\\
x_N &\geq 2000 && (1.13)\\
x_L &\geq 1000 && (1.14)
\end{aligned}$$

(b) Representação gráfica:



(c) Resolução pelo Algoritmo Simplex

	x_N	x_L	s_1	s_2	s_3	
s_1	1	1	1	0	0	10
s_2	2	$\boxed{3}$	0	1	0	24 $\rightrightarrows$
s_3	3	5	0	0	1	45
$-\frac{Z}{10}$	60	72	0	0	0	0
		$\upuparrows$				

	x_N	x_L	s_1	s_2	s_3	
s_1	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	2 $\rightrightarrows$
x_L	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	8
s_3	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	1	5
$-\frac{Z}{10}$	12	0	0	-24	0	-576
	$\upuparrows$					

	x_N	x_L	s_1	s_2	s_3	
x_N	1	0	3	-1	0	6
x_L	0	1	-2	1	0	4
s_3	0	0	1	-2	1	7
$-\frac{Z}{10}$	0	0	-36	-12	0	-648

Problema 2

- Índices

i fábricas $i \in [1, 2]$;

j armazéns $j \in [1, \dots, 4]$;

k clientes $k \in [1, \dots, 6]$.

- Variáveis de decisão

x_{ij} quantidade a enviar da fábrica i para o armazém j;

y_{ik} quantidade a enviar da fábrica i para o cliente k;

z_{jk} quantidade a enviar do armazém j para o cliente k.

Como algumas das entregas não podem ser efectuadas (traços nas tabelas), as variáveis de decisão correpondentes não serão definidas. Uma outra solução para o problema consistiria em definir as variáveis todas e restringir o valor dessas variáveis a zero.

As variáveis em causa são então:

$x_{21}, y_{12}, y_{15}, y_{22}, y_{23}, y_{24}, y_{25}, y_{26}, z_{11}, z_{15}, z_{26}, z_{31}, z_{34}, z_{41}, z_{42}$

- Função objectivo

O objectivo pretendido é a minimização do custo Z, isto é:

$$
\begin{aligned}
\min\ Z \quad = \quad & 0.5x_{11} + 1.0x_{12} + 0.8x_{13} + 0.4x_{14} \\
& +0.2x_{22} + 0.6x_{23} + 0.8x_{24} \\
& +1.0y_{11} + 1.5y_{13} + 2.0y_{14} + 1.0y_{16} \\
& +2.0y_{21} \\
& +1.5z_{12} + 0.5z_{13} + 1.5z_{14} + 1.0z_{16} \\
& +1.0z_{21} + 0.5z_{22} + 0.5z_{23} + 1.0z_{24} + 0.5z_{25} \\
& +1.5z_{32} + 2.0z_{33} + 0.5z_{35} + 1.5z_{36} \\
& +0.2z_{43} + 1.5z_{44} + 0.5z_{45} + 1.5z_{46}
\end{aligned}
$$

- Restrições

Cada fábrica tem uma capacidade máxima, o que quer dizer que a soma de todos os x_{ij} com todos os y_{ik} para uma dada fábrica i não pode exceder a capacidade da fábrica i.

Dado que existem duas fábricas, esse limite de capacidade resulta em duas restrições.

Por exemplo para a fábrica de Bragança ($i = 1$):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + y_{11} + y_{13} + y_{14} + y_{16} \leq 150000 \tag{1.1}$$

Também há limites para a capacidade de fornecimento de um armazém e como há quatro armazéns, há quatro restrições do mesmo tipo.

Para o armazém de Coimbra ($j = 1$):

$$x_{11} \leq 70000 \tag{1.2}$$

Os pedidos dos clientes também devem ser satisfeitos e como há 6 clientes, há 6 restrições do mesmo tipo.

Para o cliente C1 ($k = 1$):

$$y_{11} + y_{21} + z_{21} = 50000 \tag{1.3}$$

É também necessário considerar as restrições de continuidade para os armazéns, que obrigam a que não saia mais mercadoria de um armazém do que a que entra. Como há 4 armazéns, há quatro restrições do mesmo tipo.

Para o armazém de Coimbra ($j = 1$):

$$z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{16} \leq x_{11} \tag{1.4}$$

Por fim, é necessário garantir que todas as variáveis têm valores maiores ou iguais a zero:

$$\begin{aligned} &x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, y_{11}, y_{13}, y_{14}, y_{16}, y_{21}, z_{12}, z_{13}, \\ &\quad z_{14}, z_{16}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}, z_{25}, z_{32}, z_{33}, z_{35}, z_{36}, z_{43}, z_{44}, z_{45}, z_{46} \geq 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Complete agora o modelo!

Problema 3

(a)

- Variáveis de decisão

  x_{A1} quantidade de peças do tipo **A** a produzir na máquina **M1**;
  x_{A2} quantidade de peças do tipo **A** a produzir na máquina **M2**;
  x_{B1} quantidade de peças do tipo **B** a produzir na máquina **M1**;
  x_{B2} quantidade de peças do tipo **B** a produzir na máquina **M2**.

- Função objectivo

  Pretende-se maximizar o número de montagens completas:

$$\max \quad Z = \min(x_{A1} + x_{A2}, x_{B1} + x_{B2})$$

  Esta função objectivo pode ser linearizada, acrescentando mais uma variável auxiliar e duas restrições:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = Y \\ x_{A1} + x_{A2} \quad & \geq Y \\ x_{B1} + x_{B2} \quad & \geq Y \end{aligned}$$

- Modelo

$$\max \quad Z = Y \tag{1.1}$$

  Sujeito a:

$$\begin{aligned} 3x_{A1} + 5x_{B1} \quad & \leq 8 \times 60 \ (minutos) && (1.2) \\ 20x_{A2} + 15x_{B2} \quad & \leq 8 \times 60 \times 5 \ (minutos) && (1.3) \\ x_{A1} + x_{A2} - Y \quad & \geq 0 && (1.4) \\ x_{B1} + x_{B2} - Y \quad & \geq 0 && (1.5) \\ x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2} \quad & \geq 0 && (1.6) \end{aligned}$$

  Onde 1.2 e 1.3 correspondem às restrições de capacidade das máquinas 1 e 2 respectivamente (há 5 máquinas tipo 2). As restrições 1.4 e 1.5 são as restrições auxiliares para linearização da função objectivo. Por último, as restrições 1.6 exigem que todas as variáveis sejam maiores ou iguais a zero.

(b) A restrição (não linear) que modeliza a situação pretendida nesta alínea é a seguinte:

$$\left| (3x_{A1} + 5x_{B1}) - \frac{20x_{A2} + 15x_{B2}}{5} \right| \leq 30$$

Simplificando obtém-se:

$$|3x_{A1} + 5x_{B1} - 4x_{A2} - 3x_{B2}| \leq 30 \tag{1.7}$$

Para obter um modelo de Programação Linear, será necessário transformar a restrição 1.7 em duas restrições lineares:

$$3x_{A1} + 5x_{B1} - 4x_{A2} - 3x_{B2} \leq 30 \tag{1.8}$$

$$-3x_{A1} - 5x_{B1} + 4x_{A2} + 3x_{B2} \leq 30 \tag{1.9}$$

Problema 4

- Índices

  i classes de doentes $i \in [1, \dots, n]$;

  j tipo de serviço $j \in [1, \dots, m]$;

  k recurso $k \in [1, \dots, l]$.

- Variáveis de decisão

  x_i número de doentes da classe i que pagam;

  y_i número de doentes da classe i que não pagam.

- Função objectivo
  Com a função objectivo, equação 1.1, pretende-se modelizar as condições (m) e (n) do enunciado.

$$\max Z = \sum_{i=1}^{n} w_i(x_i + y_i) \tag{1.1}$$

- Restrições

$$\begin{aligned}
\forall_k \sum_{i,j} \quad & r_{ij}a_{kj}(x_i + y_i) && \leq t_k && (1.2)\\
\forall_i \quad & x_i + y_i && \leq u_i && (1.3)\\
\forall_i \quad & x_i + y_i && \geq l_i && (1.4)\\
\forall_i \quad & v_i(x_i + y_i) && \geq y_i && (1.5)\\
\forall_i \quad & x_i, y_i && \geq 0 && (1.6)
\end{aligned}$$

$$\sum_i \left(\sum_j r_{ij}p_j - \sum_{j,k} r_{ij}a_{kj}c_k \right) x_i - \sum_i \left(\sum_{j,k} r_{ij}a_{kj}c_k \right) y_i + b - a \geq e \tag{1.7}$$

As restrições 1.2 garantem que não são utilizados mais recursos do tipo k do que os disponíveis, satisfazendo as condições (c), (d) e (e) do enunciado. As restrições 1.3 e 1.4 garantem que não serão ultrapassados quer os limites inferiores quer os limites superiores dos número de doentes de cada classe i, satisfazendo as condições (f) e (g) do enunciado. As restrições 1.5 garantem que se verifica a condição referida na alínea (h) do enunciado. A restrição 1.7 garantem que não se terá um lucro inferior a e (condição (l) do enunciado). Por último a restrição 1.6 garante que todas as variáveis são maiores ou iguais a zero.

Problema 5

- Índices

i tipo de carga (A, B e C) $i \in [1, 2, 3]$;
j tipo de porão (P, C, R) $j \in [1, 2, 3]$.

- Variáveis de decisão

x_{ij} quantidade de carga i a transportar no porão j (em toneladas).

- Função objectivo

  Pretende-se maximizar o lucro com o transporte das cargas i em todos os porões j, o que corresponde à soma do lucro obtido com o transporte da carga A, com o lucro com transporte da carga B e da carga C.

$$\max Z = 20 \sum_j x_{1j} + 24 \sum_j x_{2j} + 16 \sum_j x_{3j} \tag{1.1}$$

- Restrições

$$\sum_j x_{1j} \leq 7000 \tag{1.2}$$
$$\sum_j x_{2j} \leq 6500 \tag{1.3}$$
$$\sum_j x_{3j} \leq 4000 \tag{1.4}$$
$$\sum_i x_{i1} \leq 2000 \tag{1.5}$$
$$\sum_i x_{i2} \leq 3200 \tag{1.6}$$
$$\sum_i x_{i3} \leq 1800 \tag{1.7}$$
$$60x_{11} + 50x_{21} + 25x_{31} \leq 100000 \tag{1.8}$$
$$60x_{12} + 50x_{22} + 25x_{32} \leq 14000 \tag{1.9}$$
$$60x_{13} + 50x_{23} + 25x_{33} \leq 80000 \tag{1.10}$$
$$\frac{60x_{11}+50x_{21}+25x_{31}}{\sum_i x_{i1}} = \frac{100000}{2000} \tag{1.11}$$
$$\frac{60x_{12}+50x_{22}+25x_{32}}{\sum_i x_{i2}} = \frac{14000}{3200} \tag{1.12}$$
$$\frac{60x_{13}+50x_{23}+25x_{33}}{\sum_i x_{i3}} = \frac{80000}{1800} \tag{1.13}$$
$$\forall_{i,j} \quad x_{ij} \geq 0 \tag{1.14}$$

As restrições 1.2, 1.3 e 1.4 garantem que não se transporta mais carga do que a que existe de cada um dos tipos. As restrições 1.5, 1.6 e 1.7 garantem que não se ultrapassa a tonelagem máxima permitida em cada um dos porões. As restrições 1.8, 1.9 e 1.10 garantem que não se ultrapassa a capacidade (volume) máxima permitida em cada um dos porões. As restrições 1.11, 1.12 e 1.13 garantem que se mantem a proporção entre o peso em cada porão e a respectiva capacidade. Por fim, as restrições 1.14 garantem que todas as variáveis de decisão são maiores ou iguais a zero.

- Modelo

  O modelo apresentado (equações 1.1 a 1.14) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\max Z = 20\sum_j x_{1j} + 24\sum_j x_{2j} + 16\sum_j x_{3j}$$

$$\begin{array}{lcl}
\sum_j & x_{1j} & \leq 7000 \\
\sum_j & x_{2j} & \leq 6500 \\
\sum_j & x_{3j} & \leq 4000 \\
\sum_i & x_{i1} & \leq 2000 \\
\sum_i & x_{i2} & \leq 3200 \\
\sum_i & x_{i3} & \leq 1800 \\
 & 60x_{11} + 50x_{21} + 25x_{31} & \leq 100000 \\
 & 60x_{12} + 50x_{22} + 25x_{32} & \leq 14000 \\
 & 60x_{13} + 50x_{23} + 25x_{33} & \leq 80000 \\
 & 10x_{11} - 25x_{31} & = 0 \\
 & 178x_{12} + 146x_{22} + 66x_{32} & = 0 \\
 & 100x_{13} + 72x_{23} + 37x_{33} & = 0 \\
\forall_{i,j} & x_{ij} & \geq 0
\end{array}$$

Problema 6

(a)

- Índices

  i fábricas (**A** e **B**) $i \in [1, 2]$;
  j máquinas ($\mathbf{M_1}, \mathbf{M_2}, \mathbf{M_3}$) $j \in [1, 2, 3]$;
  k produtos (P_1 e P_2) $k \in [1, 2]$.

- Variáveis de decisão

  x_{ijk} número de dias de produção durante um mês do produto k, na fábrica i, máquina j;
  y_{ik} quantidade do produto k a transportar a partir da fábrica i;
  z_{ik} quantidade do produto k a transportar para a fábrica i.

- Coeficientes

  c_{ijk} custo diário de produção do produto k, na fábrica i, máquina j;
  p_{ijk} produção diária do produto k, na fábrica i, máquina j;
  m_{ij} disponibilidade (em dias) da máquina j da fábrica i;
  d_{ik} procura na fábrica i do produto k;
  s_{ik} custo de transporte, a partir da fábrica i do produto k;
  t_{ik} custo de transporte, para a fábrica i do produto k.

- Modelo

  Objectivo

$$\min Custo = \sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk} + \sum_{i,k} s_{ik} y_{ik} + \sum_{i,k} t_{ik} z_{ik} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
\forall_{i,k} \quad & \textstyle\sum_j p_{ijk} x_{ijk} - y_{ik} + z_{ik} && = d_{ik} && (1.2) \\
\forall_{i,j} \quad & \textstyle\sum_k x_{ijk} && \leq m_{ij} && (1.3) \\
\forall_{i,j,k} \quad & x_{ijk}, y_{ik}, z_{ik} && \geq 0 && (1.4)
\end{aligned}$$

  As restrições 1.2 garantem que a procura do produto k na fábrica i é satisfeita. As restrições 1.3 são restrições de capacidade (disponibilidade) das máquinas. Finalmente as restrições 1.4 garantem que todas as variáveis tomam valores maiores ou iguais a zero.

(b) Concretize agora o modelo genérico apresentado, de tal forma que corresponda à situação descrita no enunciado.

(c) Ao resolver a alínea anterior, teve com certeza que tratar o caso das variáveis x_{231} e x_{232}, dado que essas variáveis foram definidas no modelo genérico, mas na realidade não existe nenhuma máquina 3 na fábrica 2. Há várias formas de resolver esta questão:

- quando se "concretiza"o modelo, pode-se não definir as variáveis em causa (ver resolução do exercício 2);
- pode-se associar um valor nulo à produção nessa máquina não existente ($p_{23k} = 0$) (será que é suficiente?);

- pode-se associar um custo infinito (muito grande) à produção nessa máquina não existente ($c_{23k} = \infty$), dado que se trata de um problema de minimização e nessa situação as variáveis serão nulas na solução final;
- podem-se acrescentar restrições do tipo $x_{23k} = 0$.

Problema 7

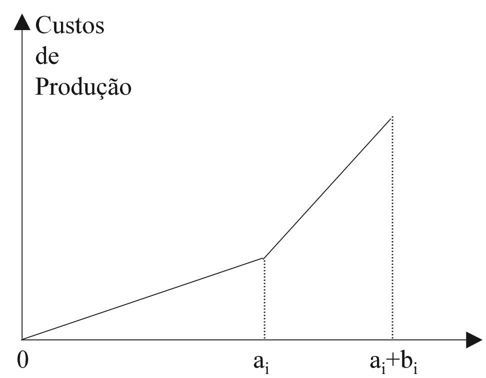
- Índices

  i fábricas $i \in [1, \dots, 3]$;
  j postos de venda $j \in [1, \dots 10]$.

- Variáveis de decisão

  y_{1i} quantidade de kl de cerveja a produzir em i, em regime normal;
  y_{2i} quantidade de kl de cerveja a produzir em i, em regime extraordinário;
  q_{ij} quantidade de kl de cerveja a transportar da fábrica i para o posto de venda j.

- Coeficientes



  a_i quantidade máxima de kl de cerveja a produzir em regime normal na fábrica i;
  r_i custo de produção de 1 kl de cerveja em regime normal;
  b_i quantidade máxima de kl de cerveja a produzir em regime extraordinário na fábrica i;
  s_i custo de produção de 1 kl de cerveja em regime extraordinário;
  c_{ij} custo de transporte de 1 kl de cerveja da fábrica i para o posto j;
  d_j procura no posto j (em kl);
  α_j preço de venda de 1 kl de cerveja no posto j (em contos);
  β_j custo por perda de venda de cada kl de cerveja no posto j (em contos);
  γ_j preço de venda a um armazém de 1 kl de cerveja em excesso no posto j.

- Variáveis auxiliares

  Vai ser necessário considerar duas variáveis auxiliares que correspondam ao excesso e à escassez de cerveja no posto de venda j.

  u_j excesso de cerveja no posto j, em kl;
  v_j escassez de cerveja no posto j, em kl.

- Função objectivo

  Pretende-se com a função objectivo encontrar o valor máximo para o lucro, satisfazendo as restrições impostas. O valor do lucro obtém-se (obviamente) subtraindo as despesas das receitas.

- Receitas

  Venda de cerveja directamente no posto ((procura no posto j - escassez no posto j) $\times$ preço de venda no posto j)

$$\sum_j (d_j - v_j)\alpha_j \tag{1.1}$$

  Venda de cerveja ao armazém (excesso de cerveja no posto j $\times$ preço de venda do posto j ao armazém)

$$\sum_j u_j \gamma_j \tag{1.2}$$

- Despesas

  Despesa com produção de cerveja em regime normal e com produção de cerveja em regime extraordinário.

$$\sum_i (r_i y_{1i} + s_i y_{2i}) \tag{1.3}$$

  Despesa com transporte de cerveja da fábrica i para o posto j.

$$\sum_{i,j} c_{ij} q_{ij} \tag{1.4}$$

  Despesa com perda de venda de cerveja no posto j.

$$\sum_j v_j \beta_j \tag{1.5}$$

A função objectivo será então:

$$\max \quad \sum_j ((d_j - v_j)\alpha_j + u_j\gamma_j - v_j\beta_j) \; - \; \sum_i (r_i y_{1i} + s_i y_{2i}) \; - \; \sum_{i,j} c_{ij} q_{ij} \tag{1.6}$$

- Restrições

$$
\begin{array}{lcl}
\forall_i & y_{1i} & \leq a_i \quad (1.7)\\
\forall_i & y_{2i} & \leq b_i \quad (1.8)\\
\forall_i & \sum_j q_{ij} & \leq y_{1i} + y_{2i} \quad (1.9)\\
\forall_j & \sum_i q_{ij} - d_j & = u_j - v_j \quad (1.10)\\
\forall_{i,j} & q_{ij} & \geq 0 \quad (1.11)\\
\forall_j & u_j, v_j & \geq 0 \quad (1.12)\\
\forall_i & y_{1i}, y_{2i} & \geq 0 \quad (1.13)
\end{array}
$$

Considerando que, tal como é afirmado no enunciado, o custo de produção de cerveja em regime normal é inferior ao custo de produção de cerveja em regime extraordinário ($r_i < s_i$), e dado que o problema é de maximização de lucros (minimização de custos) não será necessário garantir, a partir das restrições impostas, que só se começa a produzir em regime extraordinário depois de ter produzido toda a quantidade possível em regime normal. Nesse caso as restrições 1.7 e 1.8 são suficientes para garantir as restrições impostas no enunciado.

As restrições 1.9 garantem que a quantidade transportada de uma fábrica para todos os armazéns não excede a quantidade produzida nessa fábrica.

As restrições 1.11 e 1.13 garantem que as variáveis são maiores ou iguais a zero.

As restrições 1.10 e 1.12 são devidas às variáveis auxiliares criadas. Repare-se que assim uma quantidade de cerveja num posto de venda que seja positiva, negativa ou nula, será representada pela diferença de duas variáveis ≥ 0. Questões em aberto:

- Será que esta representação é única?
- Justifique porque razão a imposição destas restrições modeliza o excesso ou a escassez de cerveja num determinado posto.

Problema 8

- Índices

  regime da cultura $- i \in \{1, 2\}$ (intensivo ou não)

  destino da colheita $- j \in \{1, 2\}$ (venda directa ou alimentação de criação)

- Dados

  Cultura de cereais

  $400ha$ – Número máximo de hectares a arrendar.

  $240ha$ – Limiar de mudança de custo de arrendamento do hectare.

  $\mathbf{Custha_{\leq 240ha}}$ – Custo de arrendamento do hectare abaixo ou igual ao limiar ($15Euro$).

  $\mathbf{Custha_{>240ha}}$ – Custo de arrendamento do hectare acima do limiar ($25Euro$).

  $\mathbf{MdO_i}$ – Quantidade de mão de obra necessária por hectare e por ano no regime $i.(15\frac{pessoa \times hora}{ha \times ano}, 23\frac{pessoa \times hora}{ha \times ano})$

  $\mathbf{CustMat_i}$ – Custo dos materiais necessários por hectare e por ano no regime $i.(50\frac{Euro}{ha \times ano}, 90\frac{Euro}{ha \times ano})$

  $\mathbf{Colheita_i}$ – Colheita por hectare e por ano no regime i.
  $(2.8\frac{kl}{ha \times ano}, 4.0\frac{kl}{ha \times ano})$

  $12.5\frac{pessoa \times hora}{kl}$ – Quantidade de mão de obra para colheita.

  $62.5\frac{Euro}{kl}$ – Preço de venda dos cereais.

  Criação

  $1350m^2$ – Número máximo de m^2 de espaço coberto para criação.

  $1\frac{kl}{unidade}$ – Quantidade de kl de cereais necessários por unidade de criação.

  $20\frac{pessoa \times hora}{unidade}$ – Quantidade de mão-de-obra necessária por unidade de criação.

  $4\frac{m^2}{unidade}$ – Quantidade de chão coberto necessário por unidade de criação.

  $87.5\frac{Euro}{kl}$ – Custo dos cereais comprados no exterior.

  $200unidades$ – Limiar de mudança de preço de venda de unidade de criação.

  $\mathbf{VendUC_{\leq 200unidades}}$ – Preço de venda de cada unidade de criação abaixo ou igual ao limiar ($175Euro$).

  $\mathbf{VendUC_{>200unidades}}$ – Preço de venda de cada unidade de criação acima do limiar ($160Euro$).

  Pessoal - recurso necessário para cereais e para criação

  $4000pessoa \times hora$ – Número máximo de $pessoa \times hora$ grátis por ano.

  $3000pessoa \times hora$ – Limiar de mudança de custo por pessoa-hora.

  $\mathbf{CustPess_{\leq 3000pessoa \times hora}}$ – Custo de contratação de uma $pessoa \times hora$ abaixo ou igual ao limiar ($4Euro$).

  $\mathbf{CustPess_{>3000pessoa \times hora}}$ – Custo de contratação de uma $pessoa \times hora$ acima do limiar ($7Euro$).

- Variáveis de decisão

  Neste problema o que é realmente preciso decidir? Em primeiro lugar é necessário decidir quantos ha de terreno devem ser arrendados (há um limite superior) e seguidamente qual o regime de cultura dos cereais. Esse regime de cultura será aplicado a **toda** a cultura. A próxima decisão será qual a quantidade de cereais a vender e qual a quantidade a usar para alimentação de criação (a quantidade de criação a considerar está limitada pelos m^2 de chão coberto existentes).

  As variáveis de decisão terão que ser divididas de acordo com os limiares de custo ou de preço de venda.

  $\mathbf{x_{ij}}$ quantidade de hectares a arrendar $\leq 240ha$, a cultivar no regime i e cuja colheita vai ser utilizada para j.

  $\mathbf{y_{ij}}$ quantidade de hectares a arrendar $> 240ha$, a cultivar no regime i e cuja colheita vai ser utilizada para j.

  $\mathbf{p}$ quantidade de unidades de criação $\leq 200ha$.

  $\mathbf{q}$ quantidade de unidades de criação $> 200ha$.

  δ é uma variável auxiliar que permitirá forçar que a cultura seja toda realizada em regime normal ou toda realizada em regime intensivo.

$$\delta \begin{cases} 1 & \text{se cultura em regime normal} \\ 0 & \text{se cultura em regime intensivo} \end{cases} \tag{1.1}$$

- Função Objectivo

  Para obter a função objectivo é necessário obter $\sum custos$ e os $\sum lucros$ e, por exemplo, maximizar $\sum lucros - \sum custos$.

  - Lucros das vendas dos cereais
    $\sum_i (x_{i1} + y_{i1}) \times \mathbf{Colheita_i} \times 62.5 \frac{Euro}{kl}$
  - Lucros das vendas da criação
    $\mathbf{p} \times 175 Euro + \mathbf{q} \times 160 Euro$
  - Custos de arrendamento de terras
    $\sum_{ij} x_{ij} \times 15 Euro + \sum_{ij} y_{ij} \times 25 Euro$
  - Custos de materiais para cultura
    $\sum_{ij} ((x_{ij} + y_{ij}) \times \mathbf{CustMat_i})$
  - Mão-de-obra total **MdOTot** (em $pessoa \times hora$)

    Mão-de-obra total corresponde à soma da mão-de-obra para cultura com a mão-de-obra para colheita e a mão-de-obra para criação.

    Mão-de-obra para cultura
    $\sum_{ij} ((x_{ij} + y_{ij}) \times \mathbf{MdO_i})$
    Mão-de-obra para colheita
    $\sum_{ij} ((x_{ij} + y_{ij}) \times \mathbf{Colheita_i}) \times 12.5 \frac{pessoa \times hora}{kl}$
    Mão-de-obra para criação
    $(p + q) \times 12.5 \frac{pessoa \times hora}{unidade}$

- Custos da mão-de-obra

  $max(0, \mathbf{MdOTot} - (4000 pessoa \times hora + 3000 pessoas \times hora) \times 7 Euro + max(0, \mathbf{MdOTot} - 4000 pessoa \times hora) \times 4 Euro$

- Custos da aquisição de cereais (só se compra no exterior a diferença entre os cereais necessários e os cereais próprios que não são vendidos)

  $(((p + q) \times 1 \frac{kl}{unidade}) - \sum_i (x_{i2} + y_{i2}) \times \mathbf{Colheita_i}) \times 87.5 \frac{Euro}{kl}$

- Restrições

$$\sum_j x_{1j} + y_{1j} \leq \delta \times M \qquad (1.2)$$

$$\sum_j x_{2j} + y_{2j} \leq (1 - \delta) \times M \qquad (1.3)$$

$$(p + q) \times 4 \frac{m^2}{unidade} \leq 1350 (m^2) \qquad (1.4)$$

$$\sum_{ij} x_{ij} + y_{ij} \leq 400 (ha) \qquad (1.5)$$

$$\forall_{ij} \quad x_{ij}, y_{ij} \geq 0 \qquad (1.6)$$

As restrições (1.2) e (1.3) impoem que toda a cultura seja realizada em regime normal ou em regime intensivo. A restrição (1.4) não permite que se considere um número de unidades de criação que exija um mais chão coberto do que o que existe. A restrição (1.5) impede que se arrendem mais *ha* de terreno do que o máximo permitido. As restrições 1.6 impõem que todas as variáveis sejam maiores ou iguais a zero.

Capítulo 2

Exercícios de Transportes Enunciados

Problema 1

Três reservatórios, com capacidades diárias de 15, 20 e 25 milhões de litros de água, abastecem 4 cidades com consumos diários de 8, 10, 12 e 15 milhões de litros de água. O custo de abastecimento, por milhão de litros, é apresentado na tabela 1.

Tabela 1: Custo de abastecimento, por milhão de litros.

		Cidades			
		A	B	C	D
Reservatórios	1	2	3	4	5
	2	3	2	5	2
	3	4	1	2	3

O problema consiste em determinar a política de abastecimento óptima (aquela com menor custo).

Formule o problema como um problema de transportes e resolva-o usando o respectivo algoritmo.

Problema 2

Uma empresa possui duas fábricas (P1 e P2) onde produz um produto que é exportado para 3 locais num país vizinho (L1, L2 e L3). O transporte é feito através de duas fronteiras (F1 e F2) (não se impõe limites máximos à quantidade que pode atravessar diariamente cada uma delas). Por outro lado, cada fronteira cobra uma taxa por cada unidade do referido produto que a atravessa (independentemente de vir de P1 ou P2) – tabela 1.

São conhecidas as disponibilidades diárias em cada fábrica, que são suficientes para satisfazer as necessidades diárias de cada local, também conhecidas (tabela 1). Sabe-se também quais são os custos para transportar uma unidade do produto, de cada produtor para cada fronteira e de cada fronteira para cada destino, indicados na figura 1.

Tabela 1: Disponibilidades, necessidades e taxas de fronteira.

PRODUTORES	P1	P2	
Disponibilidades	120	80	
LOCAIS DE DESTINO	L1	L2	L3
Necessidades	50	70	60
FRONTEIRAS	F1	F2	
Taxa por unidade	4	3	

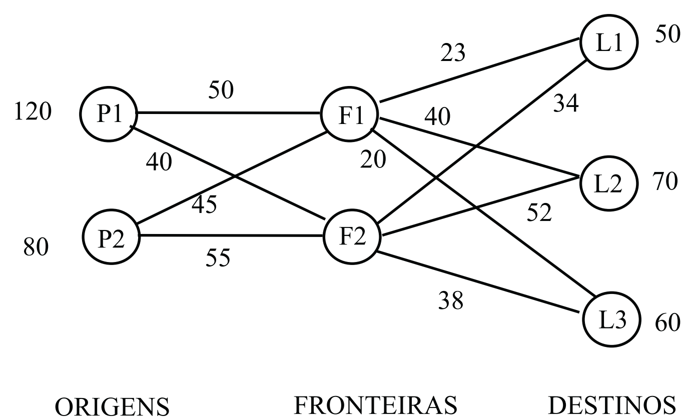


Figura 1: Rede de transportes.

(a) Considere o problema que permite encontrar a política óptima de transporte do produto entre cada produtor, fronteira e local de destino. Formule-o (sem resolver!) como um problema de transportes na forma standard.

(b) Considere agora que diariamente chegam às fronteiras F1 e F2 100 e 90 unidades do produto, respectivamente. Usando o algoritmo de transportes, determine quais as quantidades a transportar de cada fronteira para cada um dos locais de destino, por forma a minimizar o custo global associado a esse transporte. Considere iguais os restantes dados do problema.

Problema 3

Uma companhia construtora de aviões pretende planear a produção de um motor, durante os próximos 4 meses.

Para satisfazer as datas de entrega contratuais, necessita de fornecer os motores nas quantidades indicadas na 2ª coluna da tabela 1. O número máximo de motores que a companhia produz por mês, bem como o custo de cada motor (em milhões de dólares) são dados na 3ª e 4ª colunas da mesma tabela.

Dadas as variações nos custos de produção, pode valer a pena produzir alguns motores um ou mais meses antes das datas programadas para entrega. Se se optar por esta hipótese, os motores serão armazenados até ao mês de entrega, com um custo adicional de 0.015 milhões de dólares/mês.

Tabela 1: Encomendas, produção e custos.

Mês	Quantidades a entregar	Produção máxima	Custo unitário de produção	Custo unitário de armazenagem
1	10	25	1.08	—
2	15	35	1.11	0.015
3	25	30	1.10	0.015
4	20	10	1.13	0.015

O director de produção quer saber quantos motores deve fabricar em cada mês (e para que meses de entrega) por forma a minimizar os custos globais de produção e armazenagem.

Formule o problema e resolva-o pelo algoritmo de transportes.

Problema 4

Durante a semana de exames do Instituto de Altos Estudos, realizados sob a forma de provas de escolha múltipla preenchidas a lápis, sendo este fornecido pelo Instituto (conforme o modelo usado nos EUA), são necessários 60, 50, 80, 40 e 50 lápis afiados no início de cada dia, de segunda a sexta-feira respectivamente. Os lápis afiados podem ser comprados por 15$00 cada. Os lápis usados num dia de exame podem ser afiados, recorrendo ao serviço da *Afiadora Lda.* - a um custo de 2$00 a unidade - que os devolve 2 dias depois, isto é, os lápis usados na segunda-feira só poderão ser reutilizados (já afiados) na quarta-feira, e assim sucessivamente. No fim da semana os lápis podem ser revendidos a um preço de 5$00 a unidade.

(a) Formule este problema como um Problema de Transportes, de forma a que o fornecimento de lápis para o exame seja feito a um custo mínimo.

(b) Resolva o problema.

Capítulo 2

Exercícios de Transportes Resoluções

Problema 1

Solução inicial pela regra dos custos mínimos:

	A	B	C	D	F	
1	–	–	–	–	15	15
	2	3	4	5	0	
2	5	–	–	15	–	20
	3	2	5	2	0	
3	3	10	12	–	–	25
	4	1	2	3	0	
	8	10	12	15	15	

A cidade F é uma cidade fictícia introduzida para equilibrar a oferta com a procura, isto é, para colocar o problema na forma "standard".

Para que existam 7 variáveis básicas (número de origens + número de destinos - 1) é ainda necessário promover uma variável não básica a básica. A variável x_{1A} foi então considerada como básica com o valor de zero. A escolha de x_{1A} em concreto seguiu a regra de o grafo representantivo das variáveis básicas dever ser conexo e sem ciclos.

Resolvendo:

	0	-3	-2	-1	-2
2	$0+\theta$	–	–	–	$15-\theta$
	2	4 3	4 4	4 5	0
3	5	–	–	15	–
	3	2 2	4 5	2	-1 0
4	$3-\theta$	10	12	–	θ
	4	1	2	0 3	-2 0

$\theta = \min\{3, 15\} = 3$

	0	-1	0	-1	-2
2	$3+\theta$	–	–	–	$12-\theta$
	2	2 3	2 4	4 5	0
3	$5-\theta$	–	–	15	θ
	3	0 2	2 5	2	-1 0
2	–	10	12	–	3
	4	1	2	2 3	0

$\theta = \min\{5, 12\} = 5$

	0	-1	0	0	-2
2	8	–	–	–	7
	2	2 3	2 4	3 5	0
2	–	–	–	15	5
	1 3	1 2	3 5	2	0
2	–	10	12	–	3
	2 4	1	2	1 3	0

Custo = 80

Solução óptima: $1 \xrightarrow{8} A$; $3 \xrightarrow{10} B$; $3 \xrightarrow{12} C$; $2 \xrightarrow{15} D$

Problema 2

(a) Formulação como problema de transportes:

	L1	L2	L3	RP1	RP2	X	
P1/F1	77	94	74	0	∞	0	120
P1/F2	77	95	81	0	∞	0	120
P2/F1	72	89	69	∞	0	0	80
P2/F2	92	110	96	∞	0	0	80
	50	70	60	120	80	20	400

Pi/Fj – quantidade exportada a partir da fábrica Pi através da fronteira Fj.

X – coluna introduzida para equilibrar a oferta com a procura. Corresponde às quantidades que ficarão nas fábricas.

RPi – Restrição respeitante à fábrica Pi e que garante que o somatório do que atravessa as duas fronteiras, vindo da fábrica Pi, não excede a oferta em Pi.

(b) Solução inicial pela regra dos custos mínimos:

30 23	– 40	60 20	10 0	100	90	30	0
20 34	70 52	– 38	– 0	90	70	0	
50	70	60	10				
20	0	0	0				
0							

Aplicando o algoritmo de transportes:

	0	18	-3	-23
23	30+θ 23	– -1 40	60 20	10-θ 0
34	20-θ 34	70 52	– 7 38	θ -11 0

$\theta = 10$

	0	18	-3	-34
23	40-θ 23	θ -1 40	60 20	– 11 0
34	10+θ 34	70-θ 52	– 7 38	10 0

$\theta = 40$

	0	18	-2	-34
22	– 1 23	40 40	60 20	– 12 0
34	50 34	30 52	– 6 38	10 0

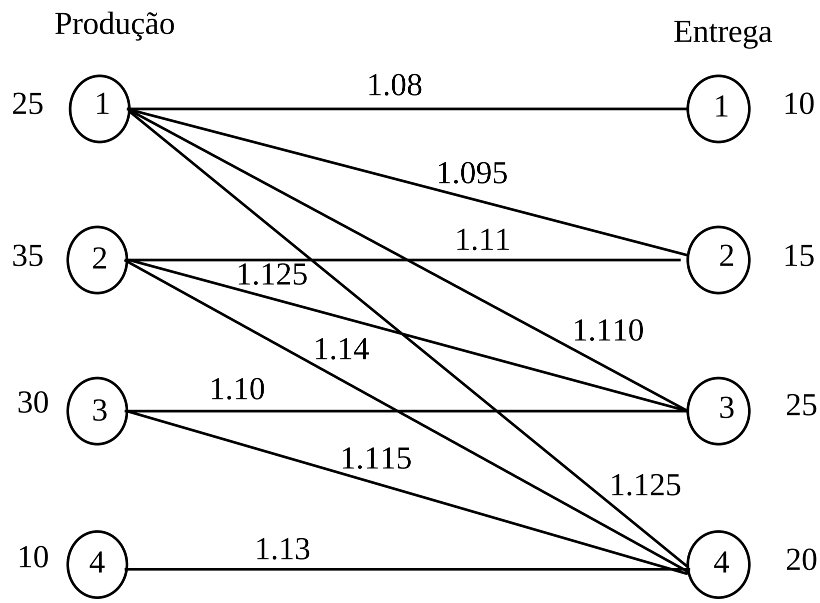
Quadro óptimo

Solução óptima:

De	Para	Quantidade
F1	L1	0
	L2	40
	L3	60
F2	L1	50
	L2	30
	L3	0

Custo óptimo = 6060

Problema 3



		Mês de entrega					
		1	2	3	4	X	
Mês de produção	1	1.080	1.095	1.110	1.125	0	25
	2	∞	1.110	1.125	1.140	0	35
	3	∞	∞	1.100	1.115	0	30
	4	∞	∞	∞	1.130	0	10
		10	15	25	20	30	100

(segue-se a resolução pelo algoritmo de transportes)

Problema 4

(a) Formulação como problema de transportes:

Destinos

		2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	X	
	Novos	10	10	10	10	10	0	60+50+80+40+50
Origens	Usados na 2ª	∞	∞	2	2	2	0	60
	Usados na 3ª	∞	∞	∞	2	2	0	50
	Usados na 4ª	∞	∞	∞	∞	2	0	80
		60	50	80	40	50	190	

(b) $\cdots$

Capítulo 3

Exercícios de Afectação Enunciados

Problema 1

Existem quatro desenhadores para desenhar quatro projectos. Embora todos possam cumprir essas tarefas, as suas eficiências relativas variam de trabalho para trabalho.

Com base em desempenhos já conhecidos, produziu-se a seguinte tabela de custos:

	D_1	D_2	D_3	D_4
P_1	8	7	9	9
P_2	5	2	7	8
P_3	6	1	4	9
P_4	2	3	2	6

O objectivo é afectar os desenhadores aos vários projectos de modo a minimizar o custo total de desenho.

Problema 2

Uma fábrica possui quatro locais (1,2,3,4) para receber três máquinas novas (A,B,C). O local 4 é demasiado pequeno para conter a máquina A. O custo da manipulação dos materiais que são processados nas máquinas, em centenas de escudos/hora, envolvendo cada máquina com as respectivas posições, é o seguinte:

	1	2	3	4
A	5	1	3	x
B	3	1	4	3
C	3	3	4	2

Pretende-se determinar que local ocupará cada uma das novas máquinas, com o objectivo de minimizar o custo total de manipulação dos materiais.

Problema 3

Dois jovens recém-casados, Romeu e Julieta, querem dividir as tarefas domésticas entre si, de forma a que cada um tenha o mesmo número de tarefas (duas para cada um) e de forma a que o tempo total gasto por semana seja mantido no mínimo.

(a) Considerando a tabela seguinte, onde se encontram os tempos que cada um deles gasta a executar cada uma das tarefas, resolva o problema deste casal.

	Compras	Cozinha	Limpeza	Roupa
Romeu	2	6	4	3
Julieta	1.5	8.5	5.5	4

(b) Considere agora que, após uma negociação assaz difícil, Romeu conseguiu com que a restrição das duas tarefas para cada um fosse levantada, isto é, todas as combinações do número de tarefas atribuídas a cada um são possíveis.

Reformule o problema atendendo a esta nova situação.

Problema 4

A empresa de transportes Asa de Luxo comprou 3 novos pequenos aviões. Após um estudo de mercado foram identificados 4 possíveis destinos para os novos voos a estabelecer: Monte Carlo, Ilhas Canárias, Biarritz, e as Ilhas Gregas. Para cada um dos destinos foi estimado o lucro (em M$) que cada um dos aviões proporcionaria:

Destino	A_1	A_2	A_3
Monte Carlo	8	11	10
Ilhas Canárias	10	9	9
Biarritz	9	4	8
Ilhas Gregas	6	7	5

Numa reunião, o administrador da Asa de Luxo (que possui um apartamento em Biarritz) decidiu que Biarritz seria necessariamente o destino de um dos três aviões.

Por outro lado, o Director de Marketing considerou que, por uma questão de estratégia, se deveria atingir o maior número possível de destinos, não enviando portanto mais do que um avião para cada destino.

O responsável pela manutenção chamou a atenção para o facto de os aviões A_1 e A_3 não poderem aterrar nas Ilhas Gregas.

Decida que avião deve seguir para cada destino e ganhe uma viagem grátis para duas pessoas, para um destino à sua escolha (oferecida pela Asa de Luxo, claro!...).

Problema 5

Para o preenchimento de 5 lugares, foi pedido a 5 candidatos que manifestassem as suas preferências. Estas foram expressas da seguinte forma:

- indiferença relativamente ao lugar: $\boxed{\text{ind}}$;
- preferência positiva: numa escala de +1 a +10;
- inconveniente: numa escala de -1 a -10.

	Lugares				
Candidatos	1	2	3	4	5
1	-5	+8	-1	$\boxed{\text{ind}}$	+4
2	-4	+2	+2	+3	+2
3	$\boxed{\text{ind}}$	$\boxed{\text{ind}}$	-5	-1	+3
4	-3	+3	+2	-2	-1
5	-1	+5	$\boxed{\text{ind}}$	+3	+5

(a) Atribua os lugares aos candidatos por forma a maximizar a satisfação global das preferências;

(b) Resolva o problema de modo a que o candidato menos satisfeito seja "colocado" com o mínimo de "inconveniência".

Problema 6

Uma companhia de navegação aérea assegura, entre três cidades (A, B, C), os serviços representados na tabela seguinte:

Vôo nº	Partida de	às	Chegada a	às
1	A	09h00	B	12h00
2	A	10h00	B	13H00
3	A	15h00	B	18H00
4	A	20h00	C	24H00
5	A	22h00	C	02H00
6	B	04h00	A	07H00
7	B	11h00	A	14H00
8	B	15h00	A	18H00
9	C	07h00	A	11H00
10	C	15h00	A	19H00

O custo de espera de um avião no solo é considerado como proporcional ao tempo de espera.

Organize os voos (encadeando-os e associando-os aos aviões necessários), por forma a minimizar os custos globais de espera no solo.

Nota: Considere apenas o caso de definição de um ciclo diário, isto é, faça o planeamento para um período de 24 horas.

Capítulo 3

Exercícios de Afectação Resoluções

Problema 1

Primeiro quadro do problema

8	7	9	9
5	2	7	8
6	1	4	9
2	3	2	6

Subtracção em cada linha do menor elemento dessa linha

1	0	2	2
3	0	5	6
5	0	3	8
0	1	0	4

Subtracção em cada coluna do menor elemento dessa coluna

1	0	2	0
3	0	5	4
5	0	3	6
0	1	0	2

1ª iteração $(3 < 4)$

1	0	2	0
3	0	5	4
5	0	3	6
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~2~~

2ª iteração $(3 < 4)$

~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
2	0	4	4
4	0	2	6
~~0~~	~~2~~	~~0~~	~~3~~

Solução óptima $(4 = 4)$

0	2	1	$\boxed{0}$
0	$\boxed{0}$	2	2
2	0	$\boxed{0}$	4
$\boxed{0}$	4	0	3

O custo da solução óptima (soma dos tempos) é 17.
Uma possível solução óptima seria:

- $D_4 \Longleftrightarrow P_1$
- $D_2 \Longleftrightarrow P_2$
- $D_3 \Longleftrightarrow P_3$
- $D_1 \Longleftrightarrow P_4$

Problema 2

Quadro inicial.
Foi acrescentada uma máquina fictícia, para que o problema de afectação ficasse na forma standard (número de máquinas igual ao número de locais disponíveis para colocar máquinas).
Para impedir que a máquina A ficasse no local 4, considerou-se que o custo associado a essa afectação era infinito.

	1	2	3	4
A	5	1	3	∞
B	3	1	4	3
C	3	3	4	2
Fictícia	0	0	0	0

Subtracção em cada linha do menor elemento dessa linha
Subtracção em cada coluna do menor elemento dessa coluna

4	0	2	∞
2	0	3	2
1	1	2	0
0	0	0	0

1ª iteração $(3 < 4)$

4	0	2	∞
2	0	3	2
1	1	2	0
0	0	0	0

Solução óptima $(4 = 4)$

2	$\boxed{0}$	0	∞
$\boxed{0}$	0	1	0
1	3	2	$\boxed{0}$
0	2	$\boxed{0}$	0

O custo da solução óptima (soma dos tempos) é 6.
Uma possível solução óptima seria:

- $A \Longleftrightarrow 2$
- $B \Longleftrightarrow 1$
- $C \Longleftrightarrow 4$
- $F \Longleftrightarrow 3$

Problema 3

(a) Quadro inicial:

	Compras	Cozinha	Limpeza	Roupa
Romeu 1	2	6	4	3
Romeu 2	2	6	4	3
Julieta 1	1.5	8.5	5.5	4
Julieta 2	1.5	8.5	5.5	4

Subtracção em cada linha do menor elemento dessa linha

0	4	2	1
0	4	2	1
0	7	4	2.5
0	7	4	2.5

Subtracção em cada coluna do menor elemento dessa coluna

0	0	0	0
0	0	0	0
0	3	2	1.5
0	3	2	1.5

1ª iteração $(3 < 4)$

0	0	0	0
0	0	0	0
0	3	2	1.5
0	3	2	1.5

Solução óptima $(4 = 4)$

1.5	$\boxed{0}$	0	0
1.5	0	$\boxed{0}$	0
0	1.5	0.5	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	1.5	0.5	0

O custo da solução óptima (soma dos tempos) é 15.5.

Uma possível solução óptima seria:

- *Romeu* $\Longleftrightarrow$ *cozinha*
- *Romeu* $\Longleftrightarrow$ *limpeza*
- *Julieta* $\Longleftrightarrow$ *compras*
- *Julieta* $\Longleftrightarrow$ *roupa*

(b) Quadro inicial:

	Compras	Cozinha	Limpeza	Roupa	Nada 1	Nada 2	Nada 3	Nada 4
Romeu 1	2	6	4	3	0	0	0	0
Romeu 2	2	6	4	3	0	0	0	0
Romeu 3	2	6	4	3	0	0	0	0
Romeu 4	2	6	4	3	0	0	0	0
Julieta 1	1.5	8.5	5.5	4	0	0	0	0
Julieta 2	1.5	8.5	5.5	4	0	0	0	0
Julieta 3	1.5	8.5	5.5	4	0	0	0	0
Julieta 4	1.5	8.5	5.5	4	0	0	0	0

Problema 4

Quadro inicial.
Problema de maximização.
Acrescentou-se um avião fictício para que número de aviões = número de destinos.

Destino	A_1	A_2	A_3	Fictício
Monte Carlo	8	11	10	?
Ilhas Canárias	10	9	9	?
Biarritz	9	4	8	?
Ilhas Gregas	6	7	5	?

Problema de minimização.
Complemento para o máximo $\boxed{11}$ dos elementos da matriz.

Destino	A_1	A_2	A_3	Fictício
Monte Carlo	3	0	1	?
Ilhas Canárias	1	2	2	?
Biarritz	2	7	3	?
Ilhas Gregas	5	4	6	?

Para evitar que A_1 ou A_3 sejam afectos às Ilhas Gregas, coloca-se ∞ no custo dessa afectação.
Para obrigar que um dos aviões reais vá para Biarritz, impede-se que o avião fictício seja afecto a Biarritz, colocando ∞ no custo dessa afectação.

3	0	1	0
1	2	2	0
2	7	3	∞
∞	4	∞	0

Subtracção em cada coluna do menor elemento dessa coluna
Subtracção em cada linha do menor elemento dessa linha

2	0	0	0
0	2	1	0
0	6	1	∞
∞	4	∞	0

1.ª iteração ($3 < 4$)

2	0	0	0
0	2	1	0
0	6	1	∞
∞	4	∞	0

Solução óptima ($4 = 4$)

3	$\boxed{0}$	0	1
$\boxed{0}$	1	0	0
0	5	$\boxed{0}$	∞
∞	3	∞	$\boxed{0}$

O valor (lucro) da solução óptima é 29 M\$.
Uma possível solução óptima seria:

- $A_1 \Longleftrightarrow$ Ilhas Canárias
- $A_2 \Longleftrightarrow$ Monte Carlo
- $A_3 \Longleftrightarrow$ Biarritz
- Fictício $\Longleftrightarrow$ Ilhas Gregas

Problema 5

(a) Atribuir os lugares aos candidatos por forma a maximizar a satisfação global das preferências:

Quadro inicial.
Associar um valor zero às afectações $\boxed{\text{ind}}$.
Problema de maximização.

	Lugares				
Candidatos	1	2	3	4	5
1	-5	+8	-1	0	+4
2	-4	+2	+2	+3	+2
3	0	0	-5	-1	+3
4	-3	+3	+2	-2	-1
5	-1	+5	0	+3	+5

Somar +5 a todos os elementos, para que todos os elementos ≥ 0.
Problema de maximização.

	Lugares				
Candidatos	1	2	3	4	5
6	0	13	4	5	9
7	1	7	7	8	7
8	5	5	0	4	8
9	2	8	7	3	4
10	4	9	5	8	10

Problema de minimização.
Complemento para o máximo $\boxed{13}$ dos elementos da matriz.

13	0	9	8	4
12	6	6	5	6
8	8	13	9	5
11	5	6	10	9
9	3	8	5	3

Subtracção em cada linha do menor elemento dessa linha
Subtracção em cada coluna do menor elemento dessa coluna

10	0	8	8	4
4	1	0	0	1
0	3	7	4	0
3	0	0	5	4
3	0	4	2	0

1ª iteração (5 = 5)
Solução óptima

10	$\boxed{0}$	8	8	4
4	1	0	$\boxed{0}$	1
$\boxed{0}$	3	7	4	0
3	0	$\boxed{0}$	5	4
3	0	4	2	$\boxed{0}$

O valor da solução óptima é 18.

Uma possível solução óptima seria:

- $Candidato1 \Longleftrightarrow Lugar2$
- $Candidato2 \Longleftrightarrow Lugar4$
- $Candidato3 \Longleftrightarrow Lugar1$
- $Candidato4 \Longleftrightarrow Lugar3$
- $Candidato5 \Longleftrightarrow Lugar5$

(b) A resolução do problema de modo a que o candidato menos satisfeito seja "colocado"com o mínimo de "inconveniência", corresponde a resolver um problema denominado "Bottleneck Assignment Problem".

Considere-se então uma afectação inicial igual à afectação óptima obtida na alínea (a):

-5	$\boxed{+8}$	-1	0	+4
-4	+2	+2	$\boxed{+3}$	+2
$\boxed{0}$	0	-5	-1	+3
-3	+3	$\boxed{+2}$	-2	-1
-1	+5	0	+3	$\boxed{+5}$

$Min\{0, 8, 2, 3, 5\} = 0$
Faça-se então a seguinte substituição:

- valores $> 0 \rightarrow 0$
- valores $\leq 0 \rightarrow 1$

1	$\boxed{0}$	1	1	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	$\boxed{0}$
1	0	$\boxed{0}$	1	1
1	0	1	$\boxed{0}$	0

Dado que a primeira coluna do quadro só tem valores = 1, a afectação óptima para o "Bottleneck Assignment Problem"é a obtida na alínea (a).

Problema 6

Para resolver o problema proposto, é necessário começar por determinar, para cada aeroporto, que voo deve realizar um avião que tenha chegado no voo x. O objectivo será a minimização do tempo de espera em cada aeroporto.

Ter-se-ão então que resolver 3 problemas de afectação (um para cada aeroporto). Esses problemas poderão ser resolvidos com quadros independentes ou então com um quadro único:

Voo de chegada	Voo de partida 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	∞	∞	∞	∞	16	23	3	∞	∞
2	∞	∞	∞	∞	∞	15	22	2	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	10	17	21	∞	∞
4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	7	15
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	13
6	2	3	8	13	15	∞	∞	∞	∞	∞
7	19	20	1	6	8	∞	∞	∞	∞	∞
8	15	16	21	2	4	∞	∞	∞	∞	∞
9	22	23	4	9	11	∞	∞	∞	∞	∞
10	14	15	20	1	3	∞	∞	∞	∞	∞

Subtracção em cada coluna do menor elemento dessa coluna
Subtracção em cada linha do menor elemento dessa linha

∞	∞	∞	∞	∞	5	5	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	5	5	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	0	19	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
0	0	7	12	12	∞	∞	∞	∞	∞
17	17	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	19	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
17	17	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	19	0	0	∞	∞	∞	∞	∞

1ª iteração (8 < 10)

∞	∞	∞	∞	∞	5	5	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	5	5	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	0	19	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
0	0	7	12	12	∞	∞	∞	∞	∞
17	17	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	19	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
17	17	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	19	0	0	∞	∞	∞	∞	∞

2ª iteração $(9 < 10)$

∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	0	24	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
0	0	12	12	12	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	24	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	24	0	0	∞	∞	∞	∞	∞

3ª iteração $(10 = 10)$
Solução óptima.

∞	∞	∞	∞	∞	0	0	$\boxed{0}$	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	$\boxed{0}$	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	$\boxed{0}$	0	24	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$\boxed{0}$	0
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	0	24	24	24	∞	∞	∞	∞	∞
0	0	$\boxed{0}$	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
0	0	24	$\boxed{0}$	0	∞	∞	∞	∞	∞
0	$\boxed{0}$	0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
0	0	24	0	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞

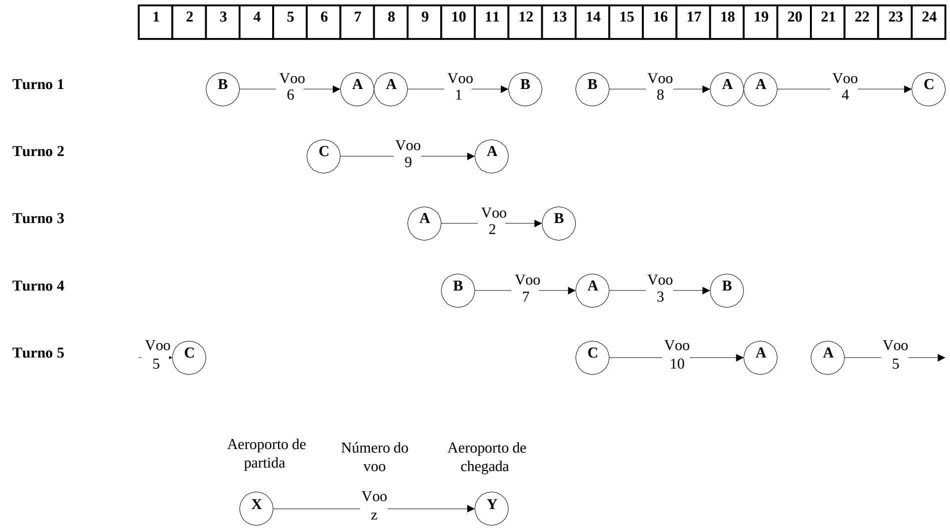
Uma possível solução óptima será:

- Voo de chegada 1 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 8
- Voo de chegada 2 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 7
- Voo de chegada 3 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 6
- Voo de chegada 4 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 9
- Voo de chegada 5 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 10
- Voo de chegada 6 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 1
- Voo de chegada 7 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 3
- Voo de chegada 8 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 4
- Voo de chegada 9 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 2
- Voo de chegada 10 $\Longleftrightarrow$ Voo de partida 5

Construindo uma "cadeia"por concatenação das soluções encontradas obtém-se:

$$1 \Longrightarrow 8 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 9 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 7 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 6 \Longrightarrow 1$$
$$5 \Longrightarrow 10 \Longrightarrow 5$$

O plano diário dos voos está representado na figura seguinte:



São portanto necessários 5 aviões. Contudo, para que se verifique o "encadeamento"óptimo encontrado, 4 aviões deverão rodar nos turnos 1 a 4 e o 5º avião deve fazer o turno 5, num ciclo de 4 dias (A_i, avião i).

	Dia					
Turno	1	2	3	4	5	...
1	A_1	A_4	A_3	A_2	A_1	...
2	A_2	A_1	A_4	A_3	A_2	...
3	A_3	A_2	A_1	A_4	A_3	...
4	A_4	A_3	A_2	A_1	A_4	...
5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	...

Capítulo 4

Exercícios Fluxo Máximo Enunciados

Problema 1

De três depósitos A, B e C, dispondo respectivamente de 20, 10 e 35 toneladas de um dado produto, pretende-se fazer chegar a três destinos D, E e F, respectivamente 25, 20 e 20 toneladas do produto. As disponibilidades de transporte em camião entre os diferentes pontos, são as seguintes:

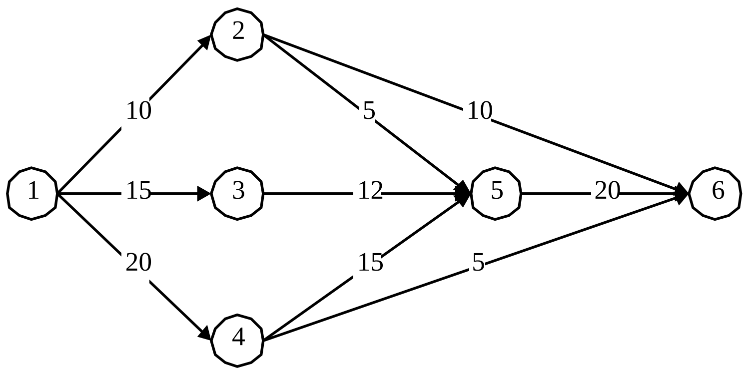
	D	E	F
A	15	10	—
B	5	—	10
C	10	5	5

Estabeleça o melhor plano de transportes.

(Sugestão: considere um nó fictício agregando a oferta e um nó fictício agregando a procura).

Problema 2

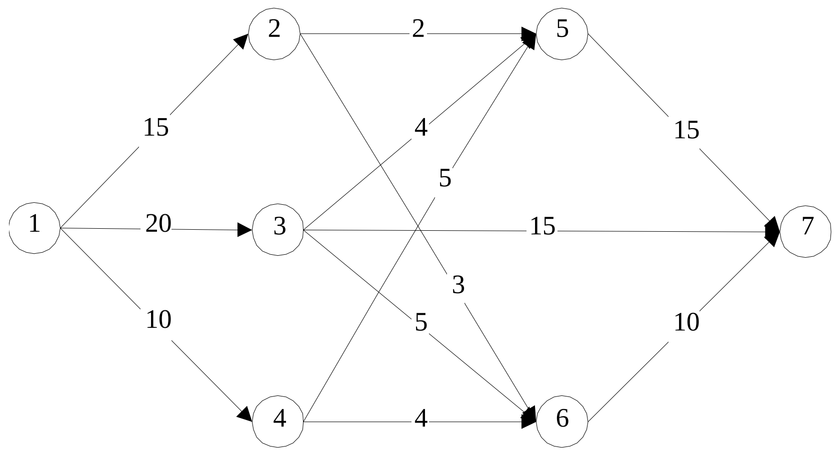
Considere a seguinte rede, em que os números nos arcos representam a capacidade do arco (quantidade de fluxo que o pode atravessar):



Determine o fluxo máximo possível (entre os nós 1 e 6) e represente os fluxos na rede na situação de fluxo máximo.

Problema 3

Considere a seguinte rede, em que os números nos arcos representam a capacidade do arco (quantidade de fluxo que o pode atravessar):



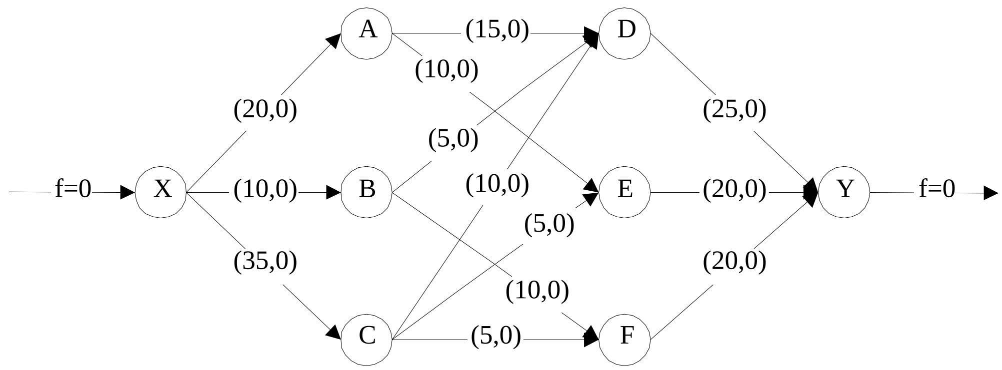
Determine o fluxo máximo possível (entre os nós 1 e 7) e represente os fluxos na rede na situação de fluxo máximo.

Capítulo 4

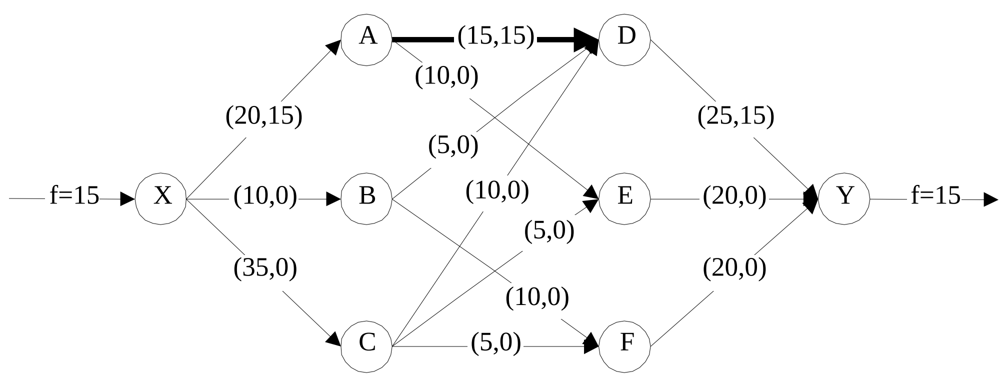
Exercícios de Fluxo Máximo Resoluções

Problema 1

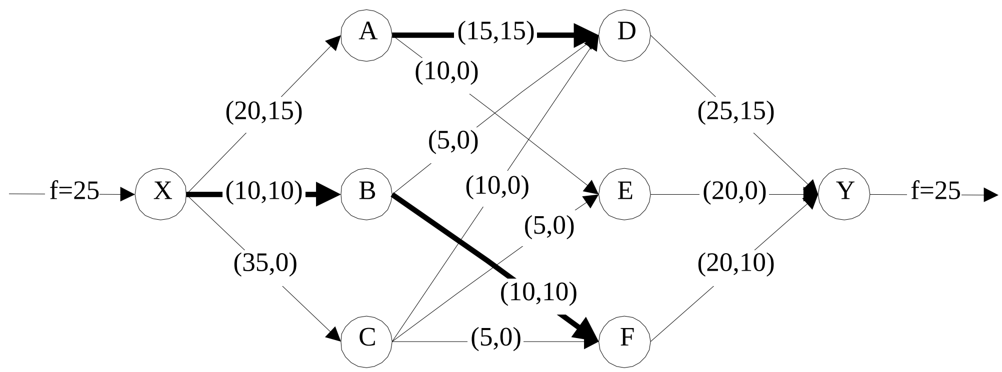
O problema proposto é um problema de fluxo máximo. Seguindo a sugestão do enunciado, acrescentou-se ao problema um nó fictício (X) agregando a oferta dos depósitos A, B e C e um nó fictício (Y) agregando a procura dos destinos D, E e F. A rede inicial está representada na figura seguinte.



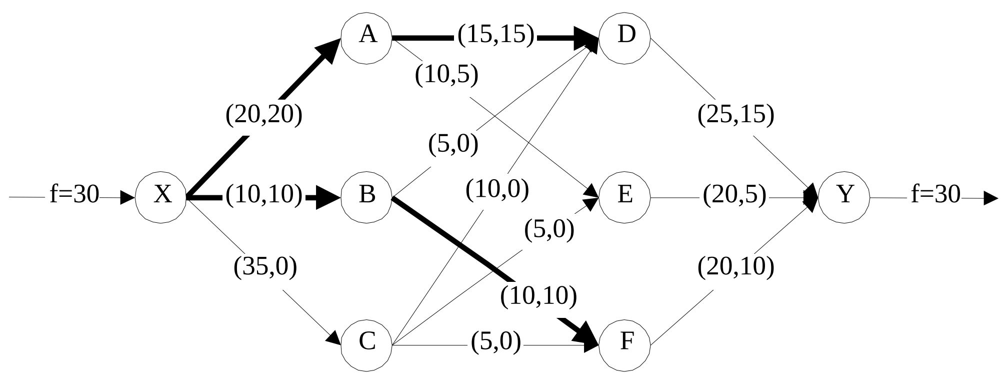
Seguindo o algoritmo de fluxo máximo, seleccionou-se um caminho não saturado entre o nó de entrada e o nó de saída. O caminho seleccionado foi $X \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 15 (capacidade do ramo com menor capacidade $A \rightarrow D$). Na figura seguinte o ramo $A \rightarrow D$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 15 ao fluxo de entrada e de saída.



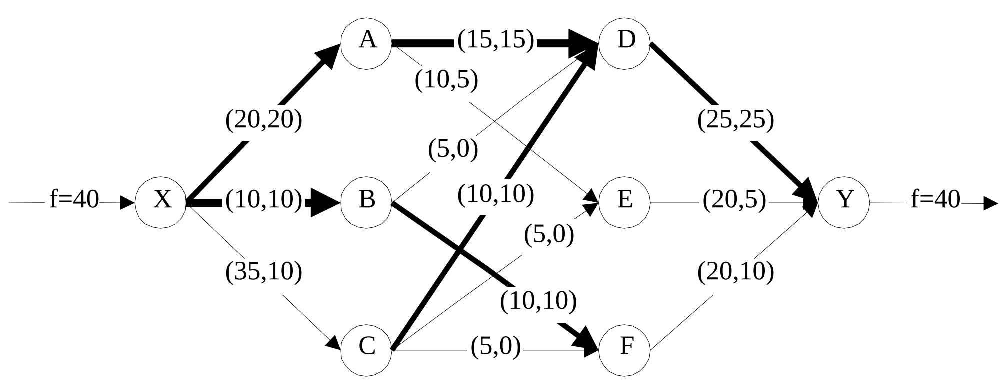
O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 10 (capacidade dos ramos com menor capacidade $X \rightarrow B$ e $B \rightarrow F$). Na figura seguinte os ramos com menor capacidade $X \rightarrow B$ e $B \rightarrow F$ foram representados a traço mais grosso e somou-se 10 ao fluxo de entrada e de saída.



O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \to A \to E \to Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade do ramo com menor capacidade $X \to A$). Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $X \to A$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.

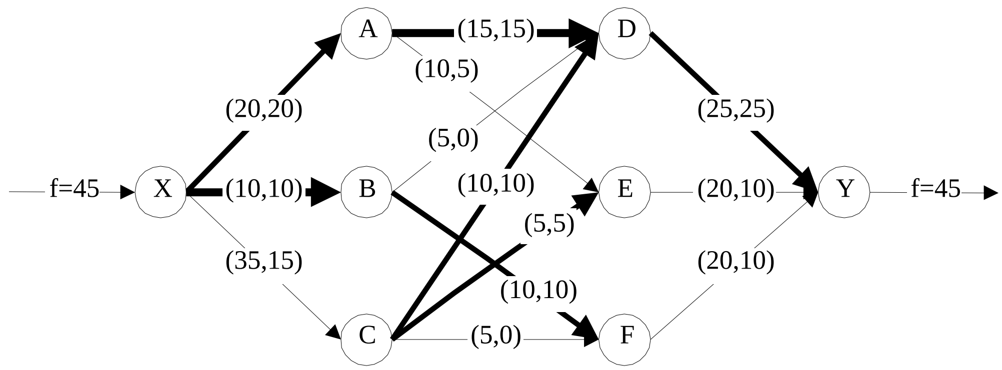


O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \to C \to D \to Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 10 (capacidade do ramo com menor capacidade $C \to D$). Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $C \to D$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 10 ao fluxo de entrada e de saída.

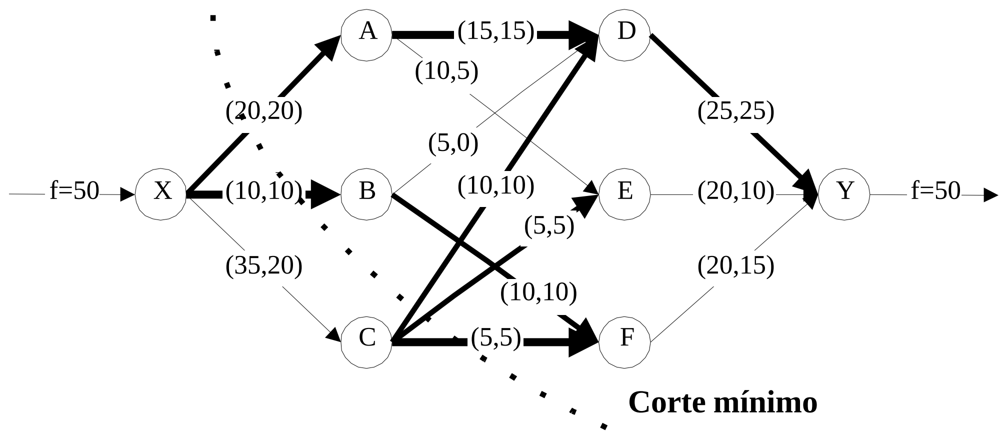


O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \to C \to E \to Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade do ramo com menor capacidade $C \to E$).

Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $C \to E$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.



O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \to C \to F \to Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade do ramo com menor capacidade $C \to F$). Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $C \to F$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.



Na figura anterior está representado um corte mínimo (que separa totalmente a entrada da saída). Pode-se então afirmar que o fluxo máximo nesta rede (a quantidade máxima de toneladas que pode ser transportada dos depósitos para os destinos) é 50.

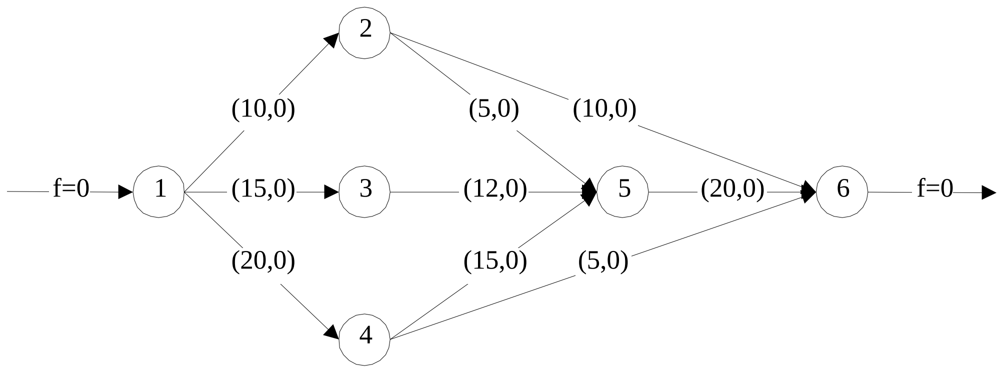
O melhor plano de transportes será então:

	D	E	F
A	15	5	—
B	0	—	10
C	10	5	5

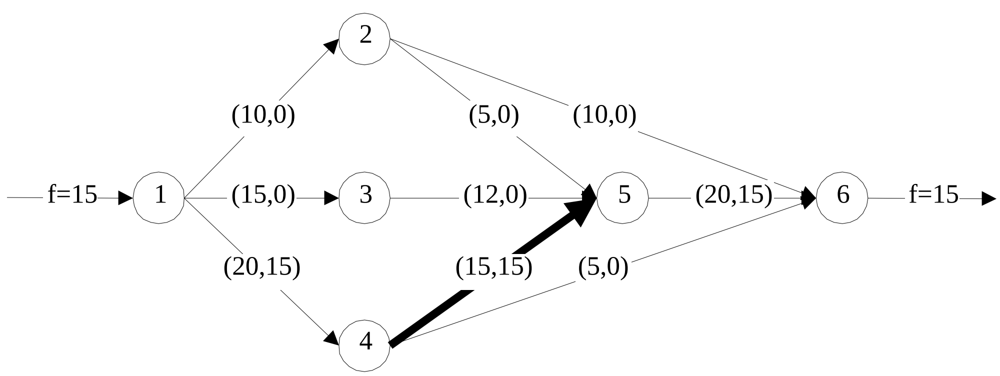
Os destinos E e F não são completamente abastecidos, não porque não exista disponibilidade nos depósitos (C ficou ainda com 15 toneladas), mas porque a disponibilidade de transporte não o permite. Para resolver este caso concreto seria necessário incrementar as disponibilidades de transporte a partir de C, nomeadamente para E e F.

Problema 2

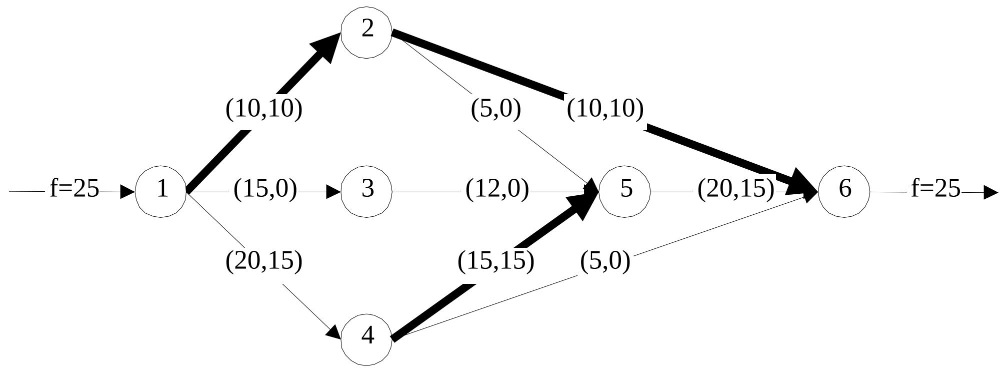
A rede inicial está representada na figura seguinte.



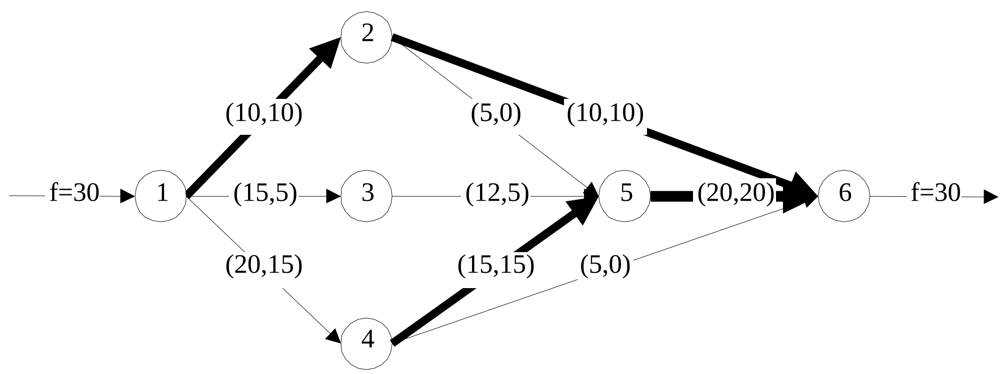
Seguindo o algoritmo de fluxo máximo, seleccionou-se um caminho não saturado entre o nó de entrada e o nó de saída. O caminho seleccionado foi $1 \to 4 \to 5 \to 6$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 15 (capacidade do ramo com menor capacidade $4 \to 5$). Na figura seguinte o ramo $4 \to 5$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 15 ao fluxo de entrada e de saída.



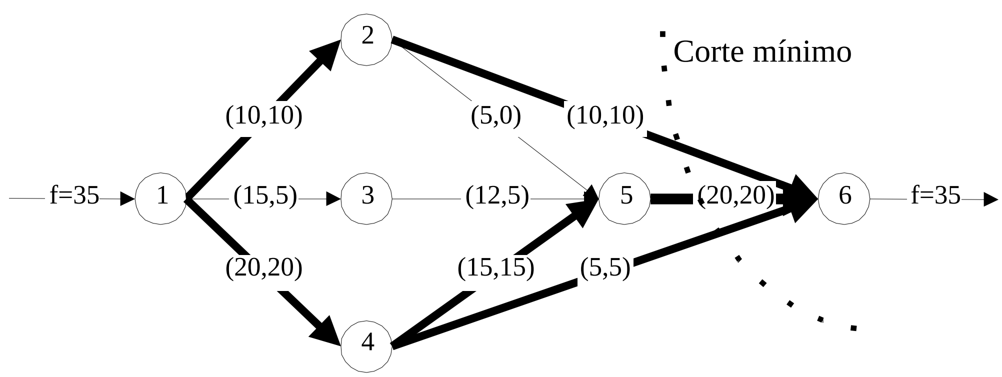
O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $1 \to 2 \to 6$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 10 (capacidade dos ramos com menor capacidade $1 \to 2$ e $2 \to 6$). Na figura seguinte os ramos com menor capacidade $1 \to 2$ e $2 \to 6$ foram representados a traço mais grosso e somou-se 10 ao fluxo de entrada e de saída.



O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $1 \to 3 \to 5 \to 6$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade do ramo com menor capacidade $\to 5 \to 6$). Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $5 \to 6$ foram representados a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.

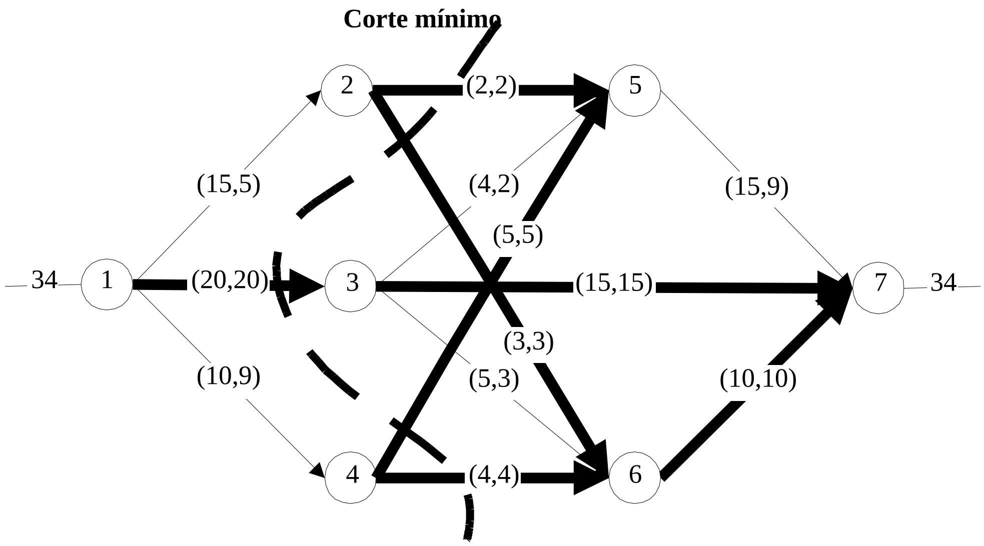


O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $1 \to 4 \to 6$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade dos ramos com menor capacidade $1 \to 4$ e $4 \to 6$). Na figura seguinte os ramos com menor capacidade $1 \to 4$ e $4 \to 6$ foram representados a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.



Na figura anterior está representado um corte mínimo (que separa totalmente a entrada da saída). Pode-se então afirmar que o fluxo máximo nesta rede é 35.

Problema 3



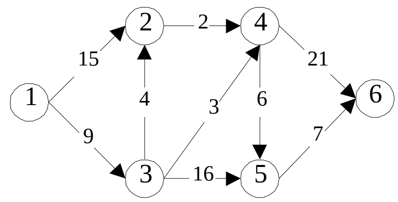
Na figura anterior está representado um corte mínimo (que separa totalmente a entrada da saída). Pode-se então afirmar que o fluxo máximo nesta rede é 34.

Capítulo 5

Exercícios de Caminho Mínimo Enunciados

Problema 1

Considere a seguinte rede:



(a) Usando o algoritmo de Dijkstra, determine a distância mínima do nó 1 ao nó 6 e indique o respectivo caminho.

(b) Pode, apenas a partir dos cálculos feitos em (a), dizer qual é a distância mínima do nó 1 ao nó 4? Justifique.

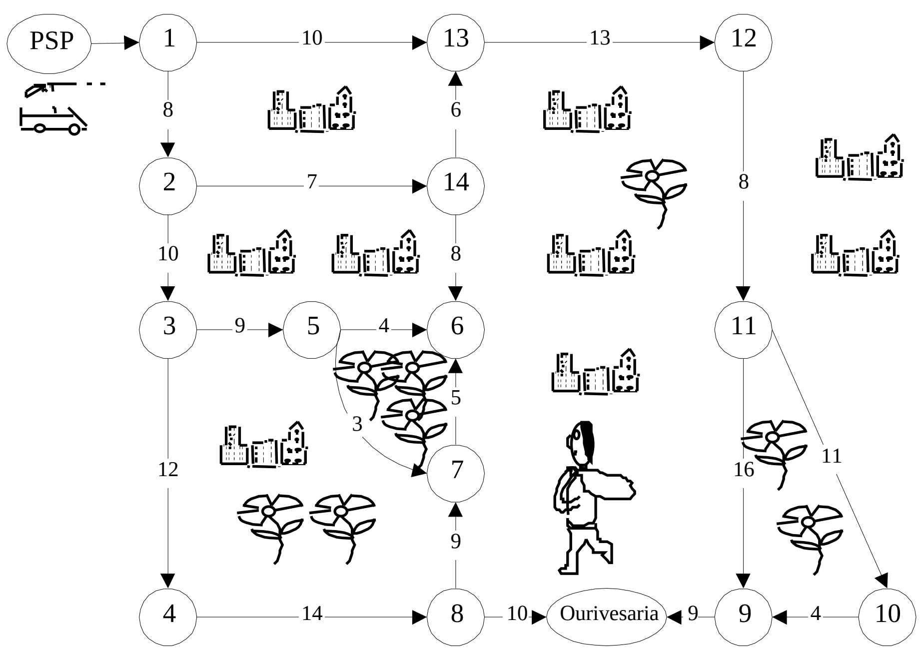
(c) Poderia, nas mesmas circunstâncias, indicar qual a distância mínima entre os nós 2 e 6? Justifique.

Problema 2

A esquadra da PSP de Cedofeita (Porto) recebeu um pedido muito urgente para intervir numa tentativa de assalto numa ourivesaria localizada numa rua próxima.

O Comando Operacional deseja conhecer qual será o melhor trajecto a tomar, por forma a minimizar o tempo da viagem até ao objectivo pretendido. Usando um mapa daquela zona da cidade, representado esquematicamente na figura, e conhecidos os tempos (médios, em segundos) necessários para percorrer cada um dos troços de rua representados, utilizaram então o algoritmo de Dijkstra para determinar esse caminho mais curto (e, entretanto os ladrões...).

Coloque-se no lugar do Comando, e, partindo da rede apresentada, encontre esse caminho mínimo.



Problema 3

Considere um tabuleiro com 3×4 quadrículas. Cada quadrícula contém um número:

0	4	3	6
7	8	6	8
2	3	1	8

O objectivo do jogo consiste em deslocar um peão desde o canto superior esquerdo até ao canto inferior direito, através de uma sequência de movimentos para a direita ou para baixo, de forma a minimizar o somatório dos pontos correspondentes às quadrículas por onde se passou.

(a) Formule este jogo como um problema de caminho mínimo.

(b) Resolva-o, usando uma das técnicas estudadas na cadeira.

Problema 4

O Sr. Ven de Dor, técnico de vendas, vai comprar um carro novo. Dadas as características da profissão do Sr. Ven de Dor, o veículo sofrerá uma utilização muito grande, o que implica que, apesar de o Sr. Ven de Dor se ir reformar daqui a 3 anos, possa ser economicamente mais favorável trocar de carro ao fim de 1 ou 2 anos, em vez de o manter durante os 3 anos. Isto sobretudo porque os custos de utilização e manutenção crescem muito rapidamente com o envelhecimento dos veículos.

O Sr. Ven de Dor sentou-se à sua secretária e calculou o custo total, preço de um carro novo menos o que o stand dá pelo usado, mais os custos de utilização e manutenção (oficina...), de comprar um carro novo no ano i e trocá-lo no fim do ano j (o ano 0 é agora). Na tabela seguinte estão representados (em milhares de escudos) os custos calculados pelo Sr. Ven de Dor.

		i		
		0	1	2
j	1	800		
	2	1800	1000	
	3	3100	2100	1200

Assim, por exemplo, trocar o carro agora comprado (fim do ano 0) no fim do ano 1 e depois manter o carro comprado no fim do ano 1 até ao fim do ano 3, corresponde a um custo de $800 + 2100 = 2900$.

O Sr. Ven de Dor tem que decidir quantas vezes deve trocar de carro (se alguma) de forma a minimizar a sua despesa total com carros durante estes 3 anos.

(a) Formule este problema como um problema de caminho mínimo.

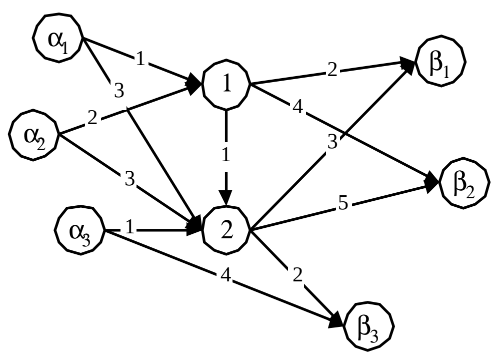
(b) Resolva o problema utilizando o algoritmo de Dijkstra.

Problema 5

O *País Azul* foi subitamente atacado pelas tropas do *País Verde*. O Estado-Maior das *Forças Azuis* reuniu de imediato para decidir sobre as movimentações de tropas que se deviam efectuar, de modo a fazer frente à invasão das *Forças Verdes*.

O Estado-Maior das *Forças Azuis* foi informado que o ataque se estava a processar em 3 frentes distintas, com nomes de código β_1, β_2 e β_3. Chegou-se de imediato à conclusão que seria necessário transportar duas divisões de combate para β_1, uma divisão para β_2 e uma outra para β_3. As *Forças Azuis* dispunham nessa altura de 5 divisões de combate nas cidades mais próximas da fronteira atacada, duas aquarteladas em α_1 (em código, claro!), duas em α_2 e uma aquartelada em α_3 . Essas divisões poderiam ser transportadas para os locais em perigo, contudo os *Aviões Verdes* já sobrevoavam o *País Azul*, e a movimentação das divisões teria que se fazer com o menor risco humano possível.

Após uma rápida inspecção do mapa do território fez-se o esquema da figura seguinte, onde se representam as estradas que podem ser utilizadas pelas divisões de combate das *Forças Azuis* (os valores representados nos troços dos percursos são distâncias em kilómetros).



Os generais das *Forças Azuis*, peritos em Investigação Operacional, precisavam de decidir de que aquartelamento deviam seguir as divisões necessárias em β_1, β_2 e β_3. O objectivo era a minimização das perdas humanas, relacionado directamente com o perigo de bombardeamento.

Durante a reunião do Estado-Maior das *Forças Azuis*, o general de 20 estrelas *Foj* (em código, como não podia deixar de ser) disse: "O perigo de bombardeamento das divisões em movimento pode ser considerado como directamente proporcional à distância entre cada α e cada β. Nesse caso devem-se usar essas distâncias como o perigo que uma divisão corre ao ser transportada de α_i para β_i e aplicar um algoritmo de afectação para resolver o problema". O general *Jac* acrescentou: "Podíamos também usar um algoritmo de transportes para resolver o problema, considerando também as distâncias como uma medida para o perigo". Por fim, o general *Soj* ordenou "A divisão que sobrar fica no aquartelamento respectivo".

Siga as instruções dos generais *Foj*, *Jac* e *Soj* e informe-nos quais foram as decisões tomadas pelo Estado-Maior das *Forças Azuis*, porque nós somos as *Forças Verdes*!!!!

Capítulo 5

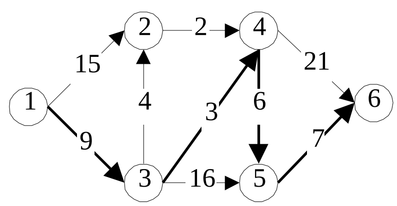
Exercícios de Caminho Mínimo Resoluções

Problema 1

(a) Usando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o seguinte quadro:

	Nós					
iter	1	2	3	4	5	6
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	15	9*	∞	∞	∞
2	0*	13	9*	12*	25	∞
3	0*	13*	9*	12*	18	33
4	0*	13*	9*	12*	18*	33
5	0*	13*	9*	12*	18*	25*

A distância mínima entre o nó 1 e o nó 6 é igual a 25. O caminho mínimo ($1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$) está representado na figura seguinte.

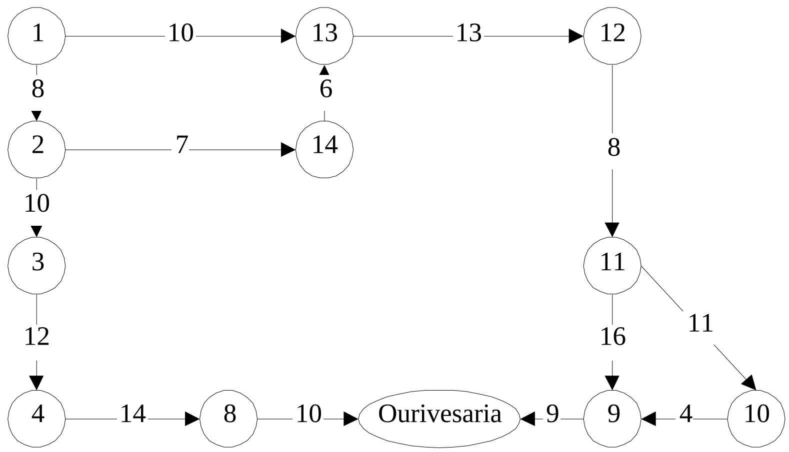


(b) É possível, apenas a partir dos cálculos feitos em (a), dizer qual é a distância mínima do nó 1 ao nó 4, dado que essa distância seria igual ao valor da etiqueta definitiva do nó 4 (12), uma vez que, por definição, o valor da etiqueta definitiva do nó i é igual à distância mínima entre o nó i e a origem.

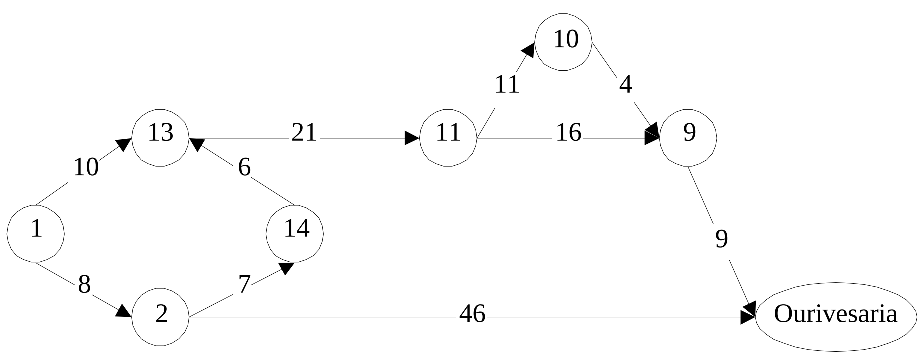
(c) Não é possível, apenas a partir dos cálculos feitos em (a), indicar qual a distância mínima entre os nós 2 e 6, dado que a distância mínima entre os dois nós não é igual à diferença entre as distâncias mínimas desses nós à origem.

Problema 2

Simplificando o mapa da zona da cidade referida, este pode ser representando esquematicamente tal como na figura seguinte. Repare que os nós 5, 6 e 7 do esquema inicial formam um beco sem saída.



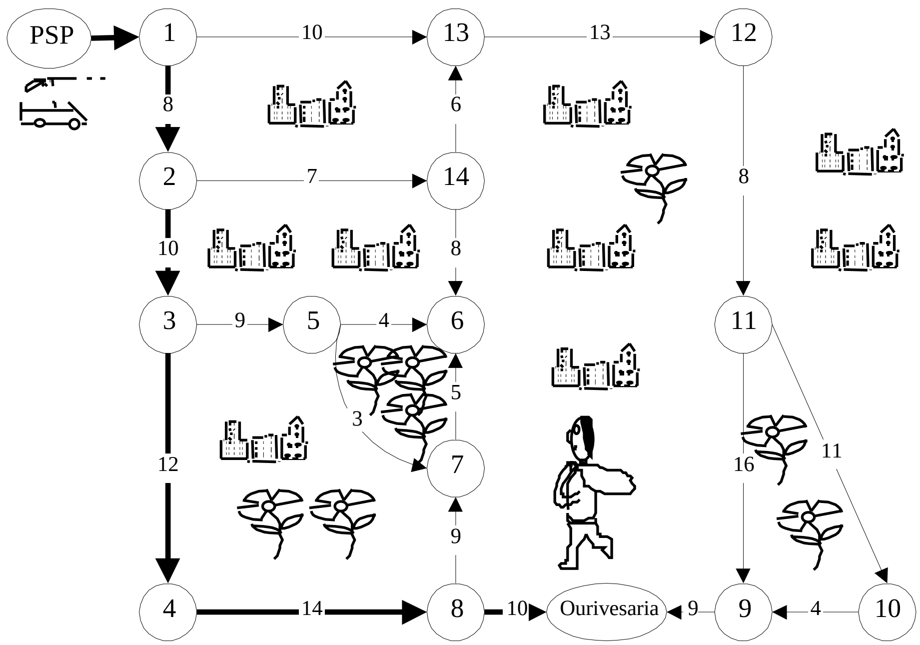
Simplificando ainda um pouco mais a rede da figura, obtém-se a seguinte rede:



Utilizando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o quadro seguinte:

	Nós							
iter	1	2	9	10	11	13	14	Our
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	8*	∞	∞	∞	10	∞	∞
2	0*	8*	∞	∞	∞	10*	15	54
3	0*	8*	∞	∞	31	10*	15*	54
4	0*	8*	∞	∞	31*	10*	15*	54
5	0*	8*	47	42*	31*	10*	15*	54
6	0*	8*	46*	42*	31*	10*	15*	54
7	0*	8*	46*	42*	31*	10*	15*	54*

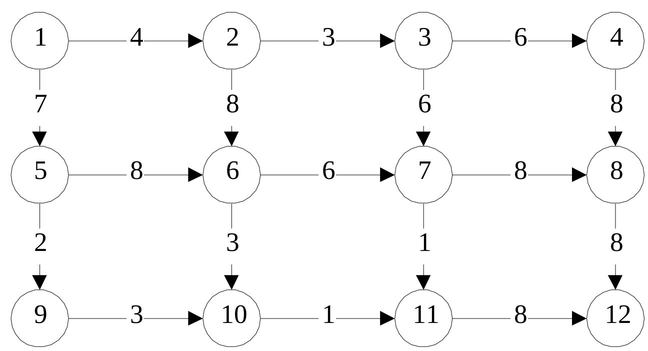
A distância mínima entre a esquadra e a ourivesaria será então igual a 54 e o caminho mínimo será $1 \to 2 \to Ourivesaria$, ou seja, $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 8 \to Ourivesaria$.



Problema 3

(a) A formulação do jogo descrito como um problema de caminho mínimo passa por fazer corresponder a cada quadrícula um nó, que será numerado de cima para baixo e da esquerda para a direita: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... Entre quadrículas adjacentes existirão ramos, orientados de acordo com os movimentos no tabuleiro. A distância associada a cada ramo será o número constante na quadrícula correspondente ao nó de chegada.

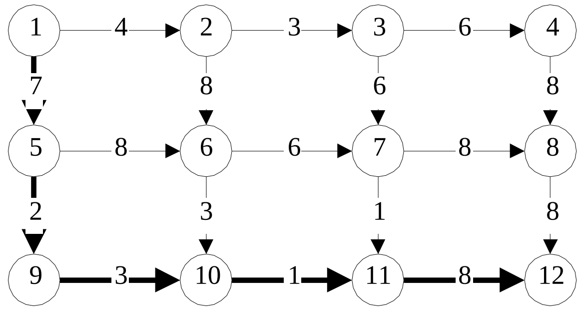
Na figura seguinte está representado o problema de caminho mínimo associado ao jogo descrito.



(b) A partir da figura e utilizando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o quadro seguinte:

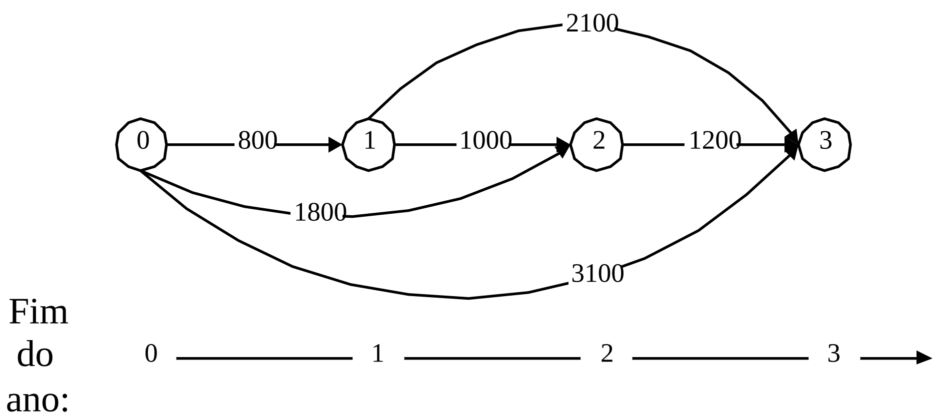
	Nós											
iter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	4*	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	0*	4*	7*	∞	7	12	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	0*	4*	7*	13	7*	12	13	∞	∞	∞	∞	∞
4	0*	4*	7*	13	7*	12	13	∞	9*	∞	∞	∞
5	0*	4*	7*	13	7*	12*	13	∞	9*	12	∞	∞
6	0*	4*	7*	13	7*	12*	13	∞	9*	12*	∞	∞
7	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13	∞	9*	12*	13	∞
8	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13*	21	9*	12*	13	∞
9	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13*	21	9*	12*	13*	∞
10	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13*	21	9*	12*	13*	21*

A solução mínima para o jogo descrito no enunciado é 21, e corresponde à distância mínima entre o nó 1 e o nó 12. O percurso óptimo está representado a traço grosso na figura seguinte:


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
4
3
6
7
8
6
8
8
6
8
2
3
1
8
3
1
8

Problema 4

(a) A representação do problema do Sr. Ven de Dor como um problema de caminho mínimo está na figura seguinte.



(b) Partindo da figura e utilizando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o quadro seguinte:

	Nós			
iter	0	1	2	3
0	0*	∞	∞	∞
1	0*	800*	1800	3100
2	0*	800*	1800*	2900
3	0*	800*	1800*	2900*

O caminho mínimo, que corresponde no problema ao custo mínimo para o Sr. Ven de Dor, será 2900. Esse custo corresponde à seguinte política óptima de aquisição de automóveis:

O Sr. Ven de Dor deve trocar de automóvel ao fim de 1 ano e deve manter esse automóvel até ao fim do período analisado.

Problema 5

Numa primeira fase, vai ser necessário determinar os caminhos mínimos entre os α_i e os β_j, para depois usar esses valores tanto no algoritmo de afectação sugerido pelo general *Foj* como no algoritmo de transportes sugerido pelo general *Jac*.

(a) Determinação dos caminhos mínimos entre α_1 e os β_j:

	Nós					
iter	α_1	1	2	β_1	β_2	β_3
0	0^*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0^*	1^*	3	∞	∞	∞
2	0^*	1^*	2^*	3	5	∞
3	0^*	1^*	2^*	3^*	5	4
4	0^*	1^*	2^*	3^*	5	4^*
5	0^*	1^*	2^*	3^*	5^*	4^*

Resultados:

- caminho $\alpha_1 \to 1 \to \beta_1$, com "custo" 3;
- caminho $\alpha_1 \to 1 \to \beta_2$, com "custo" 5;
- caminho $\alpha_1 \to 1 \to 2 \to \beta_3$, com "custo" 4.

(b) Determinação dos caminhos mínimos que partem de α_2 :

	Nós					
iter	α_2	1	2	β_1	β_2	β_3
0	0^*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0^*	2^*	2	∞	∞	∞
2	0^*	2^*	2^*	4	6	∞
3	0^*	2^*	2^*	4^*	6	5
4	0^*	2^*	2^*	4^*	6	5^*
5	0^*	2^*	2^*	4^*	6^*	5^*

Resultados:

- caminho $\alpha_2 \to 1 \to \beta_1$, com "custo" 4;
- caminho $\alpha_2 \to 1 \to \beta_2$, com "custo" 6;
- caminho $\alpha_2 \to 2 \to \beta_3$, com "custo" 5.

(c) Determinação dos caminhos mínimos que partem de α_3 :

	Nós					
iter	α_3	1	2	β_1	β_2	β_3
0	0^*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0^*	∞	1^*	∞	∞	4
2	0^*	∞	1^*	4	6	3^*
3	0^*	∞	1^*	4^*	6	3^*
4	0^*	∞	1^*	4^*	6^*	3^*

Resultados:

- caminho $\alpha_3 \to 2 \to \beta_1$, com "custo"4;
- caminho $\alpha_3 \to 2 \to \beta_2$, com "custo"6;
- caminho $\alpha_3 \to 2 \to \beta_3$, com "custo"3.

(a) Seguindo a sugestão do general *Foj*: "O perigo de bombardeamento das divisões em movimento pode ser considerado como directamente proporcional à distância entre cada α e cada β. Nesse caso devem-se usar essas distâncias como o perigo que uma divisão corre ao ser transportada de α_i para β_i e aplicar um algoritmo de afectação para resolver o problema".

Utilizem-se então os valores obtidos pelo algoritmo de caminho mínimo, para o algoritmo de afectação. O destino X no quadro abaixo corresponde à ordem do general *Soj* "A divisão que sobrar fica no aquartelamento respectivo".

		Divisões necessárias				
Divisões		β_1	β_1	β_2	β_3	
disponíveis		1	2	3	4	X
α_1	1	3	3	5	4	0
α_1	2	3	3	5	4	0
α_2	3	4	4	6	5	0
α_2	4	4	4	6	5	0
α_3	5	4	4	6	3	0

	1	2	3	4	X
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0
3	1	1	1	2	0
4	1	1	1	2	0
5	1	1	1	0	0

4 traços < 5

	1	2	3	4	X
1	$\boxed{0}$	0	0	1	1
2	0	$\boxed{0}$	0	1	1
3	0	0	$\boxed{0}$	1	0
4	0	0	0	1	$\boxed{0}$
5	1	1	1	$\boxed{0}$	1

5 traços, solução óptima com custo $3 + 3 + 6 + 3 + 0 = 15$.

A conclusão deste estudo é a seguinte:

- as duas divisões aquarteladas em α_1 devem ir para β_1 (passando por 1);
- uma das divisões aquarteladas em α_2 deve ir para β_2 (passando por 1) e a outra deve-se manter em α_1;
- a divisão aquartelada em α_3 deve ir para β_3 (passando por 2).

O custo (perigo) total da solução será 15.

(b) Seguindo a sugestão do general *Jac*: "Podíamos também tentar usar um algoritmo de transportes para resolver o problema, usando também as distâncias como uma medida para o perigo".

Utilização dos valores obtidos pelo algoritmo de caminho mínimo, para o algoritmo de transportes:

	β_1	β_2	β_3	X	
α_1	3	5	4	0	2
α_2	4	6	5	0	2
α_3	4	6	3	0	1
	2	1	1	1	

Obtenção da solução inicial pela regra dos custos mínimos:

1 $_{3}$	**--** $_{5}$	**--** $_{4}$	**1** $_{0}$	~~2~~ ~~1~~ 0
1 $_{4}$	**1** $_{6}$	**--** $_{5}$	**--** $_{0}$	~~2~~ ~~1~~ 0
-- $_{4}$	**--** $_{6}$	**1** $_{3}$	**0** $_{0}$	~~1~~ 0
~~2~~ ~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	

Primeiro quadro do algoritmo de transportes:

	0	2	0	-3
3	**1+θ** 3	**--** 0 5	**--** 1 4	**1-θ** 0
4	**1-θ** 4	**1** 6	**--** 1 5	**θ** -1 0
3	**--** 1 4	**--** 1 6	**1** 3	**0** 0

Do quadro anterior retira-se que $\theta = 1$ e pode-se obter segundo quadro do algoritmo de transportes:

	0	2	-1	-4
3	**2** 3	**--** 0 5	**--** 1 4	**--** 1 0
4	**0** 4	**1** 6	**--** 2 5	**1** 0
4	**--** 0 4	**--** 0 6	**1** 3	**0** 0

A conclusão deste estudo é igual à obtida pelo algoritmo de afectação (como seria de esperar):

- as duas divisões aquarteladas em α_1 devem ir para β_1 (passando por 1);
- uma das divisões aquarteladas em α_2 deve ir para β_2 (passando por 1) e a outra deve-se manter em α_1;
- a divisão aquartelada em α_3 deve ir para β_3 (passando por 2).

O custo (perigo) total da solução será $2 \times 3 + 1 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times 3 = 15$.