Introdução ao Trânsito de potências

Apontamentos para a disciplina de Sistemas Eléctricos de Energia I

Manuel António Matos

1999

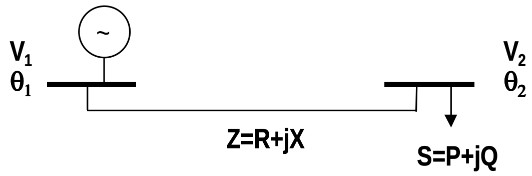
índice

1. Introdução

O presente texto é a corporização num documento do material anteriormente preparado em transparências, para apoio às aulas teóricas de Sistemas Eléctricos de Energia 1, onde é realizada a introdução a esse importante tópico. Em consequência, a principal preocupação é pedagógica, procurando-se fornecer uma base de estudo útil aos alunos do 2º ano, onde actualmente se situa a disciplina. Não são portanto abordados os aspectos mais avançados do trânsito de potências, embora se mencionem, quando justificado, ao longo do texto.

2. Iniciação ao problema de trânsito de potências

Considere-se um pequeno sistema como o da figura, constituído apenas por uma linha de impedância Z que liga um barramento de produção (1) a um barramento de consumo (2) que alimenta a carga S.



As relações entre as grandezas são fáceis de estabelecer, com base nas leis de Ohm e Kirchoff. Sendo I a corrente absorvida pela carga (ou seja, com o sentido de 1 para 2 na linha), ter-se-á:

$$I = \frac{S^*}{V_2\angle-\theta_2}$$

$$V_1\angle\theta_1 = V_2\angle\theta_2 + Z.I$$

ou, eliminando I entre as duas equações:

$$V_1\angle\theta_1 = V_2\angle\theta_2 + \frac{Z.S^*}{V_2\angle-\theta_2}$$

Eliminando denominadores, virá finalmente, fazendo $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ (esfasamento entre barramentos):

$$V_1.V_2\angle\theta_{12} = V_2^2 + Z.S^*$$

Para um dado regime de carga (S conhecido), a última parcela é constante, mas só poderemos determinar o estado da rede se conhecermos a tensão num dos barramentos. Como se verá, é muito diferente fixar a tensão no barramento 2 ou no 1.

2.1. Tensão especificada em 2

Corresponde esta situação a impor que a carga seja alimentada a uma determinada tensão (em módulo) V_2, normalmente a tensão nominal da instalação. Fixando, por comodidade, a origem das fases também nesse barramento (θ_2=0), podemos obter directamente a expressão da tensão no barramento 1:

$$V_1\angle\theta_1 = V_2 + \frac{Z.S^*}{V_2}$$

Para garantir, então, que a tensão da carga seja V_2, teremos que regular a tensão na produção para o valor calculado de V_1. Repare-se que o cálculo é extremamente simples neste caso (avaliação de uma expressão com números complexos).

2.2. Tensão especificada em 1

Esta é a situação mais realista, em que as tensões são especificadas (em módulo) nos barramentos de produção. No caso do exemplo, a fixação do valor de V_1 (com $\theta_1=0$, por comodidade), conduz a um problema complexo não linear:

$$V_2^2 - (V_1).V_2\angle-\theta_2 = Z.S^*$$

No caso geral (muitos barramentos), este problema tem que ser resolvido por métodos numéricos, mas é ilustrativo resolver o exemplo analiticamente. Para isso, vamos especificar:

$$V_1\angle\theta_1 = 1\angle 0$$

e exprimir a tensão em 2 na forma cartesiana:

$$V_2\angle\theta_2 = e + jf$$

Obtém-se então, substituindo, na equação do sistema:

$$e - jf = e^2 + f^2 + Z.S^*$$

Desdobrando as partes real e imaginária, teremos o sistema de duas equações reais:

$$\begin{cases} e = e^2 + f^2 + \mathrm{Re}\{Z.S^*\} \\ f = -\mathrm{Im}\{Z.S^*\} \end{cases}$$

A segunda equação fornece directamente o valor de f, o que permite transformar a primeira numa equação quadrática em e, facilmente resolúvel.

Exemplo 1

Supondo os valores de $S = 1 + j0.625$ e $Z = 0.005 + j0.03$, obtém-se:

$$f = -0.026875$$
$$e^2 - e + 0.024472 = 0$$

que conduz a duas soluções matemáticas:

$$e_{(1)} = 0.975 \qquad e_{(2)} = 0.023$$

Como se verá mais tarde, apenas a primeira desta soluções tem interesse, mas ambas (juntamente com f=-0.027) são soluções da equação original. Saliente-se que foi necessário resolver uma equação não-linear para obter o resultado.

2.3. O problema de trânsito de potências

Na realidade, o problema de trânsito de potências assume sempre a segunda das formas apresentadas, ou seja, é **não-linear** e tem que ser resolvido por métodos numéricos, apropriados à resolução automática. No seguimento deste texto far-se-á a formalização completa do problema e apresentar-se-á um método simplificado de resolução (o modelo linearizado, ou *DC*). Os métodos de resolução com carácter industrial serão apenas mencionados, uma vez que a sua descrição ultrapassa o âmbito deste texto introdutório.

3. Necessidade e utilidade

Os estudos que envolvem o cálculo do trânsito de potências[1] são necessários, quer no planeamento, quer na exploração dos Sistemas Eléctricos de Energia.

3.1. Planeamento

Quando se pretende tomar decisões sobre a futura estrutura e constituição do sistema (entre outros aspectos, há sempre que considerar o aumento de consumos), é necessário simular o comportamento deste em diversas circunstâncias. Em particular, o trânsito de potências é incluído nas situações seguintes:

- Expansão do sistema produtor
- Decisões sobre expansão e reforço do sistema de transporte
- Expansão e reforço de redes de distribuição
- Estudos de interligação

3.2. Exploração

Na exploração[2] do sistema, é absolutamente indispensável conhecer o impacto das alterações da situação e de decisões que se pretende tomar. O trânsito de potências é utilizado para:

- Monitorização das variáveis sujeitas a limite (correntes nas linhas e transformadores, tensões nos barramentos).
- Comparação de estratégias de exploração (custos, perdas, etc)
- Análise das consequências de saídas programadas e forçadas de componentes
- Simulação on-line e off-line do estado do sistema
- Incorporação em outros estudos (Estabilidade, Despacho, etc)

4. Formalização do problema

4.1. Modelos dos componentes

Dos múltiplos componentes do sistema, apenas são considerados os *nós* (barramentos) e os *ramos* (linhas, transformadores e baterias de condensadores), uma vez que a aparelhagem de corte e protecção e outros elementos não têm influência no resultado (à parte o seu estado aberto/fechado, que não varia durante a resolução). Os

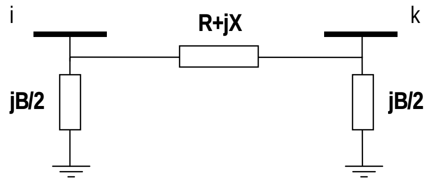
[1] Também se usam as designações Fluxo de Cargas (do inglês *Load Flow*) e, mais modernamente, Fluxo de Potências (*Power Flow*). Normalmente, simplifica-se dizendo "Trânsito de Potências" (ou as outras designações) em vez de "cálculo de ..." ou "estudo de ...".

[2] Por influência do inglês *Operation*, começa a usar-se o termo alternativo Operação.

modelos dos componentes são mais simples do que noutras circunstâncias, nomeadamente no caso dos transformadores. Por outro lado, admite-se que o sistema trifásico é simétrico e equilibrado, pelo que a análise é unifilar, ou seja, estuda-se apenas uma fase.

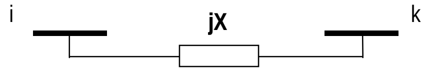
Linhas de transmissão

Na generalidade dos casos, utiliza-se o modelo unifilar em π para linhas curtas, onde a impedância Z=R+jX (Ω) é o produto da impedância linear pelo comprimento da linha. A capacidade Y=jB (S) obtém-se de forma análoga.



Transformadores (modelo base)

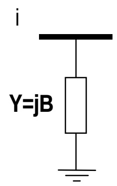
O modelo básico do transformador inclui apenas a reactância de fugas X normalmente dada em % em relação à potência aparente nominal S_n e à tensão nominal V_n.



Os transformadores com tomadas têm um modelo mais complicado (em π) que não será abordado neste texto introdutório, bem assim como os transformadores de três enrolamentos.

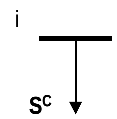
Baterias de condensadores

As baterias de condensadores estão derivadas de um barramento, sendo representadas pela admitância equivalente em estrela Y (S). Se forem dados os valores nominais da potência reactiva Q_n (var) e da tensão V_n (V), ter-se-á $B = Q_n / V_n^2$. As baterias de condensadores também podem ter tomadas, que fazem variar o valor de Y (tópico não abordado).



Barramentos: carga

Para se poder resolver o problema, têm que ser conhecidas as cargas $S^C=P^C+jQ^C$ **em todos os barramentos**. Em particular, a carga pode ser nula; nessas circunstâncias, normalmente não se representa a seta associada à carga.



Barramentos: produção

Conhecidas as cargas, é necessário especificar o valor da produção de potência activa nas centrais, atendendo aos limites das máquinas e a considerações económicas, de forma a satisfazer a equação de equilíbrio (que corresponde ao princípio da conservação de energia):

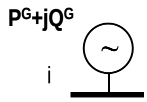
$$\sum_i P_i^G = \sum_i P_i^C + P_{perdas}$$

A esta repartição da carga total do sistema pelos centros produtores dá-se o nome de **despacho**. Como as perdas não são conhecidas antecipadamente, o despacho é feito em relação a uma **estimativa** das perdas (típico: 5 a 8% da carga total), ficando um barramento encarregado do acerto final da equação de equilíbrio: é o **barramento de compensação**. Normalmente, usa-se esse barramento para origem das fases, ou seja, como barramento de **referência** (θ=0).

Para além deste barramento (escolhido entre os de produção), existem ainda os barramentos de produção, onde existem centrais, e os de consumo (onde não há produção) ou produção fixa (onde se conhece $S^G=P^G+jQ^G$). Para efeitos formais, os diversos barramentos designam-se como se segue.

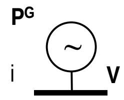
Barramentos PQ

Correspondem a barramentos de consumo (S^G=0) ou produção fixa (S^G conhecido). No primeiro caso, é costume não se representar a central. Em ambos os casos, conhecem-se P e Q.[1]



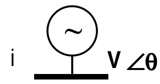
Barramentos PV

Correspondem às centrais, onde se estipula o valor da potência activa produzida P da tensão (em módulo) V, que pode ser controlada pela excitação das máquinas.



Barramento de compensação e referência (Vθ)

Neste barramento, não se conhece P^G, pelas razões indicadas, especificando-se os valores de V (tal como nos PV) e de θ (normalmente θ=0). Às vezes, designa-se este barramento por CR (compensação e referência) ou REF.



4.2. Dados necessários

De acordo com os modelos descritos na secção anterior, a lista dos dados necessários para a realização do trânsito de potências é a seguinte:

- Parâmetros eléctricos das linhas (R, X, Y), transformadores (X) e baterias de condensadores (Y)
- Potências activas (P) e reactivas (Q) consumidas em **todos** os barramentos
- Potências activas (P) produzidas nos barramentos PQ
- Tensão estipulada (V) nos barramentos PV e no barramento CR.

Saliente-se que, para os estudos industriais de trânsito de potências, são necessários dados adicionais relacionados, quer com as tomadas de transformadores e baterias, quer com os limites de produção das máquinas e com os limites de sobrecarga das linhas e transformadores.

Conceito de potência injectada

Por facilidade de formalização, convenciona-se considerar, como sentido positivo das potências nos barramentos, o da produção. Em consequência, estabelece-se o conceito de **potência injectada** num barramento i como a diferença entre a produção

[1] Alguns barramentos de ligação não possuem produção nem consumo, sendo representados simplesmente pela barra habitual. Esta situação causa às vezes perplexidade, embora se tenha apenas de considerar, nesse caso, que S^G e S^C são ambas nulas.

e o consumo:

$$S_i = S_i^G - S_i^C \quad \text{(valores complexos)}$$

ou seja,

$$P_i + jQ_i = \left(P_i^G - P_i^C\right) + j\left(Q_i^G - Q_i^C\right)$$

4.3. Resultados

A resolução do problema permite obter, primariamente, as tensões desconhecidas:

- V e θ nos barramentos PQ
- θ nos barramentos PV (já se conhecia V)

ou seja, passam a ser conhecidas as tensões em módulo e fase em **todos** os barramentos. Na posse deste valores, é fácil calcular:

- Trânsito de potências activas e reactivas nas linhas e transformadores, ou seja, P_{ik}, P_{ki}, Q_{ik}, Q_{ki} e perdas
- Potência reactiva produzida (Q^G) nos barramentos PV
- Potências activa e reactiva produzidas (P^G e Q^G) no barramento de compensação e referência
- Perdas activas e reactivas totais
- Correntes nos ramos

Por comodidade, recordam-se a seguir as principais expressões necessárias para os cálculos indicados. O resto é aritmética.

<u>Trânsito de potências nos ramos</u>

$$P_{ik} = \frac{1}{R_{ik}^2 + X_{ik}^2}\left(R_{ik}V_i^2 - R_{ik}V_iV_k\cos\theta_{ik} + X_{ik}V_iV_k\operatorname{sen}\theta_{ik}\right)$$

$$Q_{ik} = \frac{1}{R_{ik}^2 + X_{ik}^2}\left(X_{ik}V_i^2 - X_{ik}V_iV_k\cos\theta_{ik} - R_{ik}V_iV_k\operatorname{sen}\theta_{ik}\right) - \frac{B}{2}V_i^2$$

$$P_{ki} = \frac{1}{R_{ik}^2 + X_{ik}^2}\left(R_{ik}V_k^2 - R_{ik}V_iV_k\cos\theta_{ik} - X_{ik}V_iV_k\operatorname{sen}\theta_{ik}\right)$$

$$Q_{ki} = \frac{1}{R_{ik}^2 + X_{ik}^2}\left(X_{ik}V_k^2 - X_{ik}V_iV_k\cos\theta_{ik} + R_{ik}V_iV_k\operatorname{sen}\theta_{ik}\right) - \frac{B}{2}V_k^2$$

(no caso dos transformadores, R=Y=0)

<u>Perdas nos ramos</u>

$$P_{ik}^{perdas} = P_{ik} + P_{ki}$$
$$Q_{ik}^{perdas} = Q_{ik} + Q_{ki}$$

<u>Potências injectadas</u>

$$P_i = \sum_{k \neq i} P_{ik}$$
$$Q_i = \sum_{k \neq i} Q_{ik}$$

(como se verá, há uma forma alternativa de fazer este cálculo)

4.4. Formulação matemática do problema

Consideram-se os n nós (barramentos) da rede e a referência das tensões[1] (nó 0), juntamente com os ramos de admitância y_{ik} que ligam os nós i e k. Note-se que cada linha corresponde a três destes ramos, uma vez que o modelo em π inclui, além do ramo entre i e k (impedância Z), dois ramos respectivamente entre i e 0 e entre k e 0 (ambos com admitância Y/2). Ou seja, cada linha "contribui" para o garfo da rede com:

$$y_{ik} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \left(\frac{R}{R^2 + X^2}\right) - j\left(\frac{X}{R^2 + X^2}\right)$$

$$y_{i0} = y_{k0} = \frac{Y}{2} = j\frac{B}{2}$$

Repare-se, por outro lado, que as admitâncias das baterias correspondem a y_{i0}, pelo que a admitância total entre um nó i e o nó 0 é a soma de todos os y_{i0}.

Análise nodal

Uma vez definido o grafo da rede, as relações entre as correntes injectadas I e as tensões nos nós $U = V\angle\theta$ são descritas pela equação matricial:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}.\mathbf{U}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & & Y_{1n} \\ Y_{21} & & & \vdots \\ & \cdots & \cdots & \\ Y_{n1} & \cdots & & Y_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

onde

$$Y_{ik} = -y_{ik} \quad (i \neq k)$$
$$Y_{ii} = Y_{i0} + \sum_{k \neq i} y_{ik}$$

representando-se por Y_{i0} a soma de todas as admitâncias entre o nó i e a terra, tal como explicado atrás.

A relação **I=Y.U** é obviamente linear, mas as condições especificadas nos barramentos não são a corrente constante, mas a potência constante, ou seja, as correntes I dependem das tensões U:

$$I_i = \frac{S_i^*}{U_i^*} = \frac{P_i - jQ_i}{U_i^*}$$

daí que o problema seja não-linear, como se ilustrou no início deste texto.[2]

[1] Não confundir este nó ("terra") com a referência das fases, que é um dos n barramentos.
[2] Se as correntes fossem dadas, bastaria resolver o sistema de equações lineares.

Expressões gerais

A partir das equações da análise nodal, pode escrever-se:

$$I_i = \sum_k Y_{ik}.U_k \qquad (i = 1..n)$$

Substituindo agora I_i e conjugando os complexos de ambos os membros:

$$\frac{P_i + jQ_i}{U_i} = \sum_k Y_{ik}^*.U_k^* \qquad (i = 1..n)$$

e, sucessivamente (notar que $Y_{ik}=G_{ik}+jB_{ik}$),

$$P_i + jQ_i = \sum_k Y_{ik}^*.U_i.U_k^*$$

$$P_i + jQ_i = \sum_k \left[(G_{ik} - jB_{ik}).(V_i.V_k\angle\theta_{ik})\right]$$

$$P_i + jQ_i = V_i.\sum_k \left[V_k.(G_{ik} - jB_{ik}).(\cos\theta_{ik} + j\operatorname{sen}\theta_{ik})\right]$$

Separando agora as partes real e imaginária, obtêm-se finalmente as **expressões gerais do trânsito de potências**, em cada um dos nós i=1..n:

$$\boxed{\begin{aligned} P_i &= V_i \sum_k V_k\left(G_{ik}.\cos\theta_{ik} + B_{ik}.\operatorname{sen}\theta_{ik}\right) \\ Q_i &= V_i \sum_k V_k\left(G_{ik}.\operatorname{sen}\theta_{ik} - B_{ik}.\cos\theta_{ik}\right) \end{aligned}}$$

4.5. Resolução

O problema considera-se resolvido quando se dispuser de valores U para as tensões que, substituídos nas expressões anteriores, conduzam a valores de P e Q iguais aos especificados. Daí que se definam as seguintes **equações de fecho**:

$$\begin{aligned} \Delta P_i &= P_i^{esp} - P_i^{cal} = 0 \qquad &[\text{barras PQ, PV}] \\ \Delta Q_i &= Q_i^{esp} - Q_i^{cal} = 0 \qquad &[\text{barras PQ}] \end{aligned}$$

dada a impossibilidade prática de resolução analítica do problema, utilizam-se **métodos numéricos** para obter a solução[1]. Esses métodos são iterativos, partindo de valores iniciais do tipo V_i=1 pu, e parando quando as equações de fecho são satisfeitas a menos de um erro especificado.

Não está no âmbito deste texto a descrição destes métodos, que de qualquer forma se

[1] Quando o cálculo automático estava pouco desenvolvido usavam-se *analisadores de redes*, modelos em escala reduzida que permitem simular o comportamento da rede e obter, por leitura em aparelhos de medição, os valores pretendidos.

listam a seguir, para referência:

- Gauss-Seidel com matriz Y *(método clássico, hoje pouco utilizado)*
- Gauss-Seidel com matriz Z *(mais usado em estudos de contingências)*
- Newton-Raphson *(a referência industrial actual)*
- Fast Decoupled Power Flow *(também bastante utilizado)*

Uma outra estratégia de resolução é a que se descreve a seguir, baseada na linearização das expressões do trânsito de potências.

5. Modelo Linearizado (DC)

A linearização das equações permite a resolução directa (embora parcial) do problema, à custa de certas simplificações geralmente aceitáveis nas redes de tensões mais elevadas, com linhas aéreas. O nome inglês DC decorre do facto da estrutura do problema linearizado ser igual à de um problema de corrente contínua.

5.1. Aproximações

As aproximações, e respectivas consequências, são descritas na tabela seguinte.

Resistências desprezáveis (R≅0) Admitâncias à terra desprezáveis (Y≅0)	$P_{ik} = \frac{1}{X_{ik}} V_i.V_k.\mathrm{sen}\,\theta_{ik} = -P_{ki}$ $Q_{ik} = \frac{1}{X_{ik}}\left(V_i^2 - V_i.V_k.\cos\theta_{ik}\right)$ $Q_{ki} = \frac{1}{X_{ik}}\left(V_k^2 - V_i.V_k.\cos\theta_{ik}\right)$
Tensões próximas do valor nominal (V≅1 pu)	$P_{ik} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta_{ik}}{X_{ik}} = -P_{ki}$ $Q_{ik} = \frac{1}{X_{ik}}\left(1 - \cos\theta_{ik}\right) = Q_{ik}$
Esfasamentos pequenos entre barramentos contíguos (sen θ_{ik}=θ_{ik}=θ_i-θ_k, em **radianos**)	$P_{ik} = \frac{\theta_i - \theta_k}{X_{ik}} = -P_{ki}$ $Q_{ik} = Q_{ik} = 0$

5.2. Modelo nodal

O desenvolvimento das equações nodais poderá ser feito aplicando directamente as aproximações às expressões gerais. Uma via alternativa será:

$$P_i = \sum_{k \neq i} P_{ik} = \sum_{k \neq i} \frac{\theta_i - \theta_k}{X_{ik}} \qquad (i = 1..n)$$

$$P_i = \theta_i \cdot \sum_{k \neq i} \frac{1}{X_{ik}} + \sum_{k \neq i} \left(-\frac{1}{X_{ik}} \cdot \theta_k \right)$$

Definindo agora

$$B'_{ii} = \sum_{k \neq i} \frac{1}{X_{ik}} \qquad\qquad B'_{ik} = -\frac{1}{X_{ik}} \;\; (i \neq k)$$

A expressão anterior poderá escrever-se:

$$P_i = \sum_k \left(B'_{ik} \cdot \theta_k\right) \qquad\qquad i = 1..n$$

ou, matricialmente,

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{B}'\boldsymbol{\theta}}$$

5.3. Resolução

Como o determinante de **B'** é **nulo**, o sistema de equações é indeterminado, reflectindo o facto de que é necessário definir a origem das fases. Fixando $\theta_{REF}=0$ e eliminando uma equação[1] (em geral a correspondente ao barramento de referência), obtém-se um sistema de equações resolúvel:

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{B}}'.\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou, supondo que o barramento de referência[2] tem o número n:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & & B'_{1,n-1} \\ B'_{21} & & & \vdots \\ & \cdots & \cdots & \\ B'_{n-1,1} & \cdots & & B'_{n-1,n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

(ou seja, basta eliminar de **B'** a linha e coluna do barramento de referência, e eliminar o elemento n dos vectores **P** e **θ**).

Basta agora resolver o sistema de equações lineares:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\mathbf{B}}'\right)^{-1}.\hat{\mathbf{P}}$$

para obter as fases das tensões (em **radianos**), o que permite calcular os valores do trânsito de potência nas linhas, através da expressão já conhecida:

$$P_{ik} = \frac{\theta_i - \theta_k}{X_{ik}}$$

Repare-se que o método (quando aplicável), apenas fornece valores para as fases das tensões e para os trânsitos de potência activa nos ramos. Os módulos das tensões são supostos, como se disse, iguais a 1 pu, e o trânsito de potência reactiva é desprezado,

[1] O sistema é simplesmente indeterminado.
[2] Repare-se que, no modelo linearizado, não há necessidade de compensação, uma vez que as perdas são supostas nulas.

em virtude das aproximações efectuadas. Não obstante estas limitações, o método é utilizado industrialmente, seja quando só se pretendem resultados aproximados (planeamento), seja quando é absolutamente indispensável um modelo linear (certos problemas de optimização).

Por outro lado, chama-se a atenção para o facto de, se a rede não se alterar mas se quiserem estudar vários regimes de funcionamento (variação de cargas, diversos despachos, etc), não ser necessário inverter novamente a matriz. Torna-se assim muito fácil realizar estudos sucessivos sobre a mesma rede. A formulação descrita na próxima secção é especialmente útil nessas circunstâncias.

5.4. Matriz de sensibilidades

Para além da possibilidade de calcular as fases das tensões e, seguidamente, o trânsito de potência activa nos ramos, o modelo DC permite relacionar directamente os valores das potências activas nos ramos e nos barramentos, sem chegar a calcular as fases.

Por comodidade, defina-se $\mathbf{Z}' = \left(\hat{\mathbf{B}}'\right)^{-1}$, para uso na expressão:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\mathbf{B}}'\right)^{-1}.\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{Z}'.\hat{\mathbf{P}}$$

ou

$$\theta_i = \sum_{j \neq REF} Z'_{ij}.P_j \qquad i \neq REF$$

Substituindo na expressão do trânsito de potências, ter-se-á, para todas as linhas:

$$P_{ik} = \frac{\theta_i - \theta_k}{X_{ik}} = \frac{\sum\limits_{j \neq REF} Z'_{ij}.P_j - \sum\limits_{j \neq REF} Z'_{kj}.P_j}{X_{ik}} = \sum_{j \neq REF} \frac{Z'_{ij} - Z'_{kj}}{X_{ik}} \cdot P_j$$

Esta expressão é válida quando i e k não coincidam com o barramento de referência. Embora a alteração a fazer seja simples (por ser $\theta_i=0$ ou $\theta_k=0$, respectivamente), é mais cómodo definir, para este efeito apenas, $Z'_{REF,j} = 0$.

A consideração conjunta de todas as equações anteriores pode ser expressa de forma matricial como:

$$\mathbf{P_L} = \mathbf{A}.\hat{\mathbf{P}}$$

onde **A** é designada por **matriz de sensibilidades**, por indicar a sensibilidade do trânsito em cada ramo à variação das potências injectadas nos barramentos. Repare-se que, para uma dada rede, a matriz **A** não é única, toda a vez que depende do barramento de referência considerado.

O elemento genérico da matriz de sensibilidades ($A_{\ell j}$ ou $A_{(i-k),j}$) relaciona a potência activa na linha ℓ (de i para k) com a potência injectada no nó j, ou seja:

$$A_{\ell k} = A_{(i-k),j} = \frac{Z'_{ij} - Z'_{kj}}{X_{ik}}$$

(Esta expressão é válida se i ou k coincidirem com o barramento de referência, se se fizer $Z'_{REF,j} = 0$)

6. Conclusões

O problema de trânsito de potências é razoavelmente difícil na sua versão completa, combinando o facto de ser matematicamente não-linear com a imposição de diversas condições restritivas aos valores das grandezas.

No entanto, com o modelo linearizado, é fácil realizar estudos de trânsito de potências, mesmo sobre redes de certa dimensão, pois apenas é necessário inverter uma vez uma matriz e realizar algumas multiplicações vector-matriz. Basta portanto uma ferramenta como MatLab ou Maple, ou até simplesmente uma folha de cálculo, para realizar estudos e ganhar sensibilidade ao problema e às relações das grandezas em causa.