FEUP Universidade do Porto Faculdade de Engenharia

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

EEC5275
Complementos de Comunicações Digitais

(2005-2006)

Primeiro Mini-teste

Duração: 1.30h (sem consulta) 9 de Novembro de 2005

1. Num esquema de redução de ruído branco $r(n)$ de potência 10 e sem componente contínua amostras $a(n)$ correlacionadas com a resposta desejada $d(n) = r(n)$ são aplicadas à entrada de um filtro transversal de N coeficientes. A correlação entre $a(n)$ e o ruído branco $r(n)$ é tal que $a(n) = r(n) + 0,3r(n-1) + 0,1r(n-2)$.

a) (2 pts.) Determine a matriz de autocorrelação de entrada, **R**, e o vector de correlação cruzada, **p**, se $N = 5$.

b) (2 pts.) Determine o valor dos coeficientes do filtro que minimiza o erro quadrático médio $\varepsilon = E[e^2(n)]$, se $N = 2$.

c) (2 pts.) Mostre que, com $N = 2$, as curvas de nível da superfície de erro ε no sistema de eixos (ν_0, ν_1) são da forma $\frac{\nu_0^2}{a^2} + \frac{\nu_1^2}{b^2} = 1$, isto é, são elipses centradas na origem com semi-eixos de comprimento a e b. Quais são as expressões (não os valores!) de a e b?

2. As matrizes de valores próprios e de vectores próprios de uma matriz de autocorrelação **R** cujo sinal é aplicado à entrada de um filtro adaptativo são, respectivamente,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}^T$ e que o valor mínimo do erro quadrático médio é $\varepsilon_{min} = 0,6$. É usado o algoritmo do gradiente.

a) (2 pts.) Determine a potência da resposta desejada.

b) (2 pts.) Qual o valor de ε quando $\mathbf{c}_e = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}^T$?

c) (1 pt.) Indique uma gama de valores de μ que garanta a convergência do algoritmo.

(vsff)

d) (2 pts.) Determine o valor óptimo (no sentido da velocidade de convergência) do passo de adaptação, μ_{opt}.

e) (1 pt.) Qual dos dois modos naturais, ν_0 ou ν_1, converge mais rapidamente para zero? Porquê?

f) (2 pts.) Suponha agora que $\mathbf{c}_e(0) = \begin{bmatrix} -1{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}^T$. Apresente uma expressão de ε a aproximar-se do valor mínimo ε_{min}, em função da iteração n, considerando μ = 0,15. Poderá comprovar que $\varepsilon(4) \approx 0{,}74$.

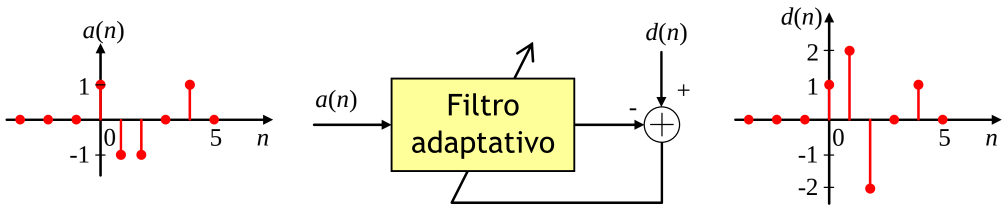
3. Em certas situações usa-se um algoritmo adaptativo que tenta minimizar a função de custo $J(n) = E\left[e^2(n)\right] + \gamma \mathbf{c}^T(n)\mathbf{c}(n)$, em que $0 < \gamma << 1$.

a) (2 pts.) Simplificando o algoritmo tal como se faz no algoritmo LMS, mostre que a equação de actualização de coeficientes do filtro é dada por $\mathbf{c}(n+1) = (1-2\mu\gamma)\mathbf{c}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{a}(n)$

b) (2 pts.) Prove que $E\left[\mathbf{c}(\infty)\right] \neq \mathbf{c}_{opt}$, ou seja, que este algoritmo produz estimativas tendenciosas ou enviesadas, ao contrário do LMS.

c) (2 pts.) Este algoritmo é equivalente a, nos algoritmos do gradiente e LMS, adicionar ao sinal de entrada ruído branco de variância γ. Nessa situação qual é a gama máxima de valores do passo μ que garante convergência no novo algoritmo?

4. Considere o sistema adaptativo da figura. O filtro tem dois coeficientes, inicialmente nulos, actualizados de acordo com o algoritmo RLS com factor de esquecimento unitário (α = 1). Arbitre $\mathbf{P}(0) = 50\mathbf{I}$.



Calcule o seguinte:

a) (1 pt.) $\hat{\mathbf{R}}(1)$

b) (1 pt.) $\hat{\mathbf{p}}(2)$

c) (2 pts.) $\mathbf{P}(1)$

d) (1 pt.) $\mathbf{k}(1)$

e) (1 pt.) $e'(1)$

f) (1 pt.) $\mathbf{c}(1)$

FIM