Anexo 1

Desigualdade de Kraft (ou de Kraft-McMillan)

Teorema: Se os inteiros $n_1, n_2, ..., n_M$ satisfazem a desigualdade

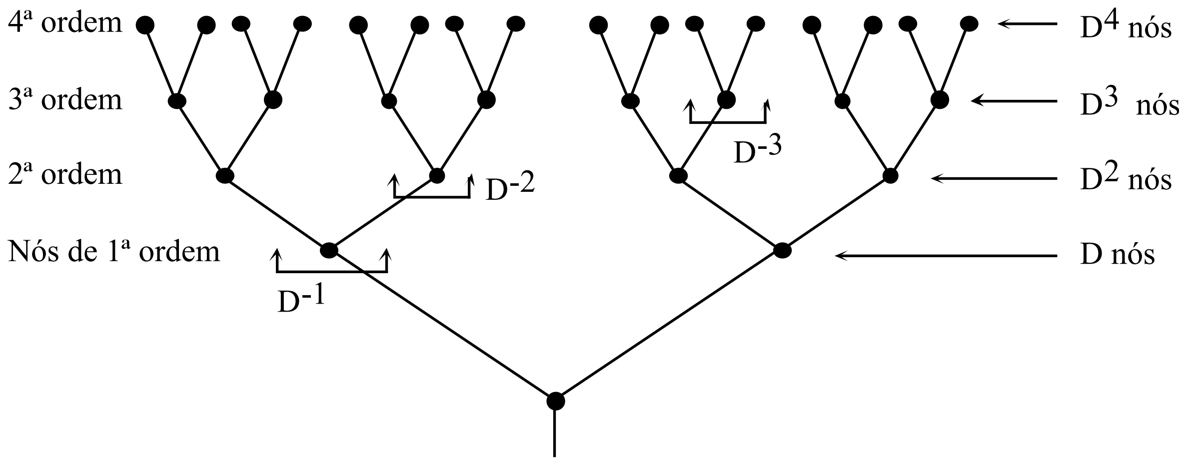
$$\sum_{i=1}^{M} D^{-n_i} \leq 1$$

então existe um código sem prefixos com um tamanho de alfabeto D cujos comprimentos de palavras são esses inteiros.

Inversamente: os comprimentos de qualquer código sem prefixos satisfazem a desigualdade.

O teorema *não diz* que qualquer código cujos comprimentos satisfazem a desigualdade é um código sem prefixos. O que o teorema diz é que existe um certo código sem prefixos e que tem esses comprimentos.

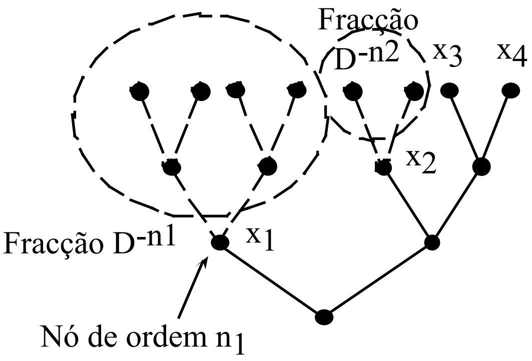
Arvore cheia (com D=2)



- Existem D^n nós de ordem n
- De cada nó de ordem i saem D ramos ligados a D nós de ordem i+1.
- De cada um dos D nós de ordem 1 sai uma fracção D^{-1} dos nós de ordem $i \geq 1$.
- De cada um dos D^2 nós de ordem 2 sai uma fracção D^{-2} dos nós de ordem $i \geq 2$.

Genericamente: De cada um dos $\boldsymbol{D^i}$ nós de ordem $\boldsymbol{i}$ sai uma fracção $\boldsymbol{D^{-i}}$ dos nós de ordem maior ou igual a $\boldsymbol{i}$.

Desigualdade de Kraft



Sejam $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_M$ um conjunto de M inteiros que satisfazem a desigualdade de Kraft.

Suponhamos que a árvore ao lado tem ordem n igual ao maior inteiro n_M.

<u>Demonstração do teorema:</u>

1 — Tomemos um nó qualquer de ordem n_1 (x_1, por exemplo) como o primeiro nó terminal da árvore de código. Todos os nós de cada ordem $\geq n_1$ estão ainda disponíveis para nós terminais,

excepto uma fracção D^{-n_1} (nós que saem de x_1)

2 — A seguir tomemos outro qualquer nó de ordem n_2 (x_2, por exemplo). Todos os nós de cada ordem $\geq n_2$ estão ainda disponíveis para nós terminais,

excepto a fracção $D^{-n_1} + D^{-n_2}$ (nós que saem de x_1 e x_2)

3 — Continuando dessa maneira, depois da atribuição do nó terminal de ordem k na árvore de código, todos os nós da árvore cheia, de cada ordem $\geq n_k$, estão ainda disponíveis

excepto a fracção $D^{-n_1} + D^{-n_2} + \ldots + D^{-n_k} = \sum_{i=1}^{k} D^{-n_i}$

4 — Por hipótese $\sum_{i=1}^{k} D^{-n_i} < 1$, para $i < M \Rightarrow$ há sempre um nó disponível para servir como nó terminal $\Rightarrow$ existe um código sem prefixos.

<u>Inversamente</u>: A árvore de código de um código sem prefixos está contida numa *árvore cheia* $\Rightarrow$ um nó terminal de ordem n_i dá origem a uma fracção D^{-n_i} dos nós terminais da árvore cheia. Como os conjuntos dos nós terminais da árvore cheia que derivam dos nós terminais da árvore de código são disjuntos, conclui-se que essas fracções somadas são ≤ 1, *c.q.d.*

Anexo 2

Valor máximo da entropia diferencial

Teorema

O valor máximo da entropia diferencial $h(Y) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\log_2 p(y)\,dy$ para todas as escolhas de funções densidade de probabilidade satisfazendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y)\,dy = \sigma^2 \qquad \text{(a)}$$

é **unicamente** atingido pela função densidade de probabilidade gaussiana

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(b)}$$

e tem o valor $h(Y) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2)$.

Demonstração (de acordo com R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication* (Wiley, 1968))

Seja $p(y)$ uma fdp arbitrária satisfazendo (a) e seja $\varphi(y)$ a fdp gaussiana de (b). Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\log_2 \frac{1}{\varphi(y)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)\left[\log_2\sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{y^2}{2\sigma^2}\log_2 e\right]dy =$$

$$= \log_2\sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2}\log_2 e = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2)$$

Portanto,

$$h(Y) - \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)\log_2\frac{\varphi(y)}{p(y)}\,dy$$

Como $\log_2 z \le (z-1)\log_2 e$, então

$$h(Y) - \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2) \le \log_2 e\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\left[\frac{\varphi(y)}{p(y)} - 1\right]dy = 0$$

A igualdade obtém-se apenas **sse** $\frac{\varphi(y)}{p(y)} = 1$ para todos os y, *c.q.d.*