Resolução

3- O polinómio p^n+1 pode ser factorizado como

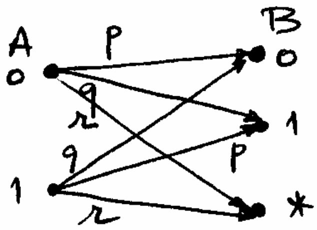
$$p^n+1 = (p+1)\underbrace{(p^{n-1}+p^{n-2}+\dots+p+1)}_{v(p)}$$

(Repare-se que na tabela de factorização de p^n+1 o factor $p+1$ $(=6_8)$ aparece sempre).

O polinómio gerador $g(p)$ é submúltiplo de p^n+1.

Como $p+1$ não é factor de $g(p)$, por hipótese, podemos concluir que $g(p)$ também é submúltiplo de $v(p)$, isto é, $v(p)$ pertence ao código. Ora $v(p)$ representa um vector binário só com "uns". c.q.d.

5 - a)



$$P[B|A] = \begin{bmatrix} P(B=0|A=0) & P(B=1|A=0) & \dots \\ P(B=0|A=1) & P(B=1|A=1) & \dots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p & q & r \\ q & p & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

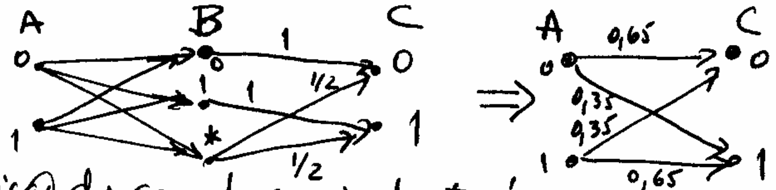
$p+q+r=1 \Rightarrow r = 1-(p+q) = 0{,}1$

b) Pede-se $P(k,n) = \binom{n}{k} p_e^k (1-p_e)^{n-k}$, em que p_e é a probabilidade de erro numa transmissão, isto é, $p_e = 1-p$.

Substituindo valores:

$$P(2,10) = \binom{10}{2}(1-p)^2 p^8 = 45\times 0{,}4^2 \times 0{,}6^8 = 0{,}1209$$

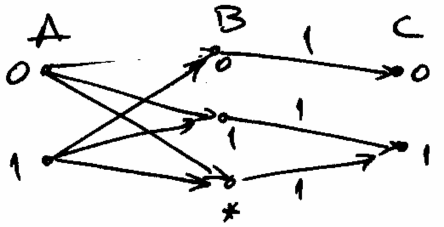
c) Agora temos



A matriz de transição do canal equivalente é

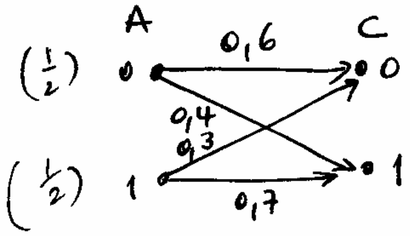
$$P[C|A] = P[B|A]\,P[C|B] = \begin{bmatrix} p & q & r \\ q & p & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+r/2 & q+r/2 \\ q+r/2 & p+r/2 \end{bmatrix} = \underset{(BSC)}{\begin{bmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{bmatrix}}$$

d)



$$P[C|B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $P[C|A] = \begin{bmatrix} p & q & r \\ q & p & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q+r \\ q & p+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$



Não é BSC.

$$P(C=0) = \tfrac{1}{2} \times 0{,}6 + \tfrac{1}{2} \times 0{,}3 = 0{,}45$$
$$P(C=1) = 1 - P(C=0) = \tfrac{1}{2} \times 0{,}4 + \tfrac{1}{2} \times 0{,}7 = 0{,}55.$$

A entropia da saída C vale $H(C) = -(0{,}45 \log_2 0{,}45 + 0{,}55 \log_2 0{,}55) =$
$= 0{,}9928.$

6- a) $001001001 = 2^{-3} + 2^{-6} + 2^{-9} = 0{,}142578125$

A primeira letra é A.

$0{,}142578125 \longrightarrow A \longrightarrow \dfrac{0{,}142578125 - 0}{0{,}3} = 0{,}4752604 \longrightarrow B$

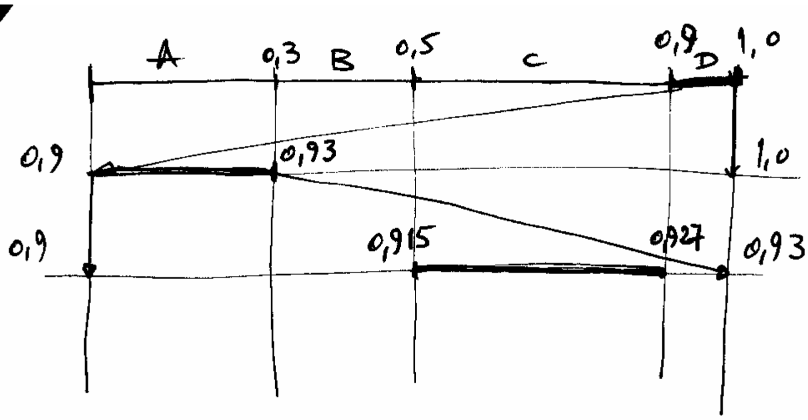
$\longrightarrow \dfrac{0{,}4752604 - 0{,}3}{0{,}2} = 0{,}87630208 \longrightarrow C$

$\longrightarrow \dfrac{0{,}87630208 - 0{,}5}{0{,}4} = 0{,}940755208 \longrightarrow D$

$\longrightarrow \dfrac{0{,}940755208 - 0{,}9}{0{,}1} = 0{,}407552\ldots \longrightarrow B$

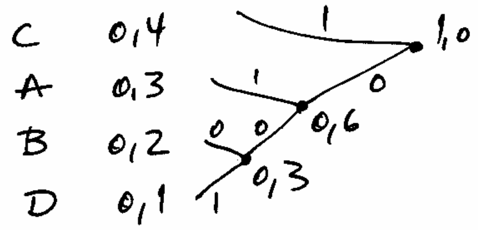
A sequência de 5 letras que deu origem àquela sequência binária é ABCDB

6b)



Qualquer número real do intervalo $[0,915 ; 0,927[$ serve (por exemplo, 0,92).

c) Código de Huffman binário



	n_i
C = 1	1
A = 01	2
B = 000	3
D = 001	3

Entropia da fonte: $H(x) = -\sum_i p_i \log_2 p_i = 1,8464$ bits/letra

$\bar{N} = \sum_i n_i p_i = 1,9$ dígitos/letra

$$\text{Eficiência} = \frac{H(x)}{\bar{N}} = 97,18\%$$

7 - a) $Y = [000111010001000]$, código cíclico binário (15,7)

Por sucessivos deslocamentos cíclicos chegamos a uma outra palavra de código $Y_1 = [100000011101000]$. Os deslocamentos cíclicos desta palavra também são palavras de código e a soma de duas palavras de código também o é.

Dessa forma poderemos escrever a matriz geradora como:

$$
G = \begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ * \\ \\ **
\end{array}
\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1
\end{bmatrix}
$$

A linha * resultou da soma da 1ª linha c/ o deslocamento da 4ª (de uma casa):

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\\
+\ 1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\\
\hline
0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0
\end{array}
$$

De igual modo a últ. linha (**) resultou da soma do deslocamento da penúlt. com a primeira.

b) O próprio polinómio gerador do código é um polinómio do código (pois $g(p) \bmod g(p) = 0$). Tratando-se de um código (15,7) $g(p)$ tem grau 8. Da matriz G acima vê-se, na últ. linha, que [000000111010001] isto é, $p^8+p^7+p^6+p^4+1$ pertence ao código. Como os primeiros 7 bits são de informação [0000001] e os restantes oito são de paridade, vemos que este é o único polin. de código de grau 8 (os outros têm grau $\neq 8$). Logo, $g(p) = p^8+p^7+p^6+p^4+1$ é o polin. gerador.

c) Podemos achar a palavra de código através de $g(p)$ ou através de G. Usando a matriz e somando as linhas 3, 5, 6 e 7 obteríamos:

$$X = [0010111] \longrightarrow Y = [0010111 \vdots 01111110].$$

~~6.~~ $G' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) A 1ª linha de G' vai passar a ser a segunda de G. A primeira de G resulta da soma da 1ª, 3ª e 4ª de G'. A terceira de G resulta da soma da 2ª, 3ª e 4ª linhas de G' e a última obtém-se somando a 2ª e 3ª linhas de G'.

Assim:

$$G = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[P \mid I_4 \right]$$

b) As linhas de G são palavras de código, donde $d_{min} \leq 4$.
A matriz H é

$$H = \left[\frac{I_4}{P} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificamos que:

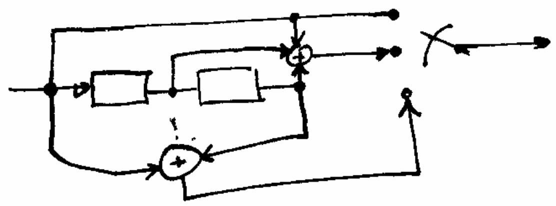
1) Não há nenhuma linha nula $\Rightarrow d_{min} \geq 2$
2) Não há duas linhas iguais $\Rightarrow d_{min} \geq 3$
3) Cada linha de G tem peso par $\Rightarrow$ cada palavra de código tem peso par $\Rightarrow d_{min} \geq 4$

Como tínhamos visto que $d_{min} \leq 4 \Rightarrow d_{min} = 4$.

c) O polinómio gerador tem grau 4 e é factor de p^8+1. Da tabela de factorização de p^n+1 vemos que $p^8+1 = (p+1)^8 \Longrightarrow g(p) = (p+1)^4 = p^4+1$.

Este polinómio (p^4+1) pertence ao código e tem peso 2 $\Longrightarrow d_{min} \leq 2$. Ora não pode haver nenhuma palavra de peso 1 (polinómios do género p^i, $i=0,1,\dots 7$) porque, se houvesse, seria múltipla de $g(p)=p^4+1$, o que não é o caso. $\Longrightarrow d_{min} = 2$.

9-



Entrada	Saída
1 0 0	1 1 1
0 1 0	0 1 0
0 0 1	0 1 1

Resposta impulsional: 111 010 011.