Resolução

1. Função densidade de probabilidade das amostras de U é constante: $p(u)=\dfrac{1}{b-a}$.

a) $h(U)=\int_a^b p(u)\log_2\dfrac{1}{p(u)}du=\int_a^b\dfrac{1}{b-a}\log_2(b-a)\,du=\log_2(b-a)$. Basta que $b-a<1$ para que seja negativa.

b) O valor médio da variável U é zero e o intervalo de valores é $[-\Delta/2,\Delta/2]=[-3,3]$. A variância é, portanto,

$$\sigma^2=E\left[\left(U-\bar{U}\right)^2\right]=E\left(U^2\right)=\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}u^2p(u)du=\frac{\Delta^2}{12}=3$$

Uma fonte contínua X com uma dada potência média (variância) σ_x^2 tem entropia diferencial máxima (de valor $h(X)=\frac{1}{2}\log_2 2\pi e\sigma_x^2$) se a fonte for gaussiana. Isto bastaria para antecipar que $h(U)<h(X)$. Vamos confirmar, impondo, claro, que $\sigma_x^2=\sigma^2=3$:

$$\begin{aligned}h(U)&=\log_2(b-a)=\log_2\Delta=\log_2 6\\ h(X)&=\frac{1}{2}\log_2 2\pi e\sigma^2=\frac{1}{2}\log_2 6\pi e\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\frac{h(U)}{h(X)}=\frac{2\log_2 6}{\log_2 6\pi e}=0,77<1\qquad\text{c.q.d.}$$

Caso geral de σ^2 qualquer: $\dfrac{h(U)}{h(X)}=\dfrac{\log_2\Delta}{\frac{1}{2}\log_2 2\pi e\sigma^2}=\dfrac{2\log_2\left(\sqrt{12}\sigma\right)}{\log_2 2\pi e\sigma^2}=\dfrac{\log_2 12\sigma^2}{\log_2 2\pi e\sigma^2}$. Dado que a função logaritmo é uma função monótona crescente esta fracção é inferior a 1 se a fracção $\dfrac{12\sigma^2}{2\pi e\sigma^2}$ também o for. De facto, $\dfrac{12\sigma^2}{2\pi e\sigma^2}=\dfrac{6}{\pi e}=0,7<1$, como se esperava.

2. O grafo de Tanner tem 9 nós de variáveis e 4 nós de paridade, isto é, tem n = 9 e $n-k$ = 4 (código (9, 5)).

a) Cada uma das somas XOR dos bits que confluem em cada um dos nós de paridade é um elemento da síndrome. Se $x_1x_2\ldots x_9$ = 110100011 verificamos que **S** = 0000: a palavra dada é uma palavra válida.

b) Há quatro equações de paridade:

$$\begin{aligned}c_1&=x_6=x_2+x_4+x_5\\ c_2&=x_7=x_1+x_2+x_3+x_5\\ c_3&=x_8=x_3+x_4+x_5\\ c_4&=x_9=x_1+x_2+x_3+x_4\end{aligned}$$

c) Da matriz de verificação de paridade tiramos a matriz geradora:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Observando a matriz de verificação de paridade verificamos que não há linhas iguais (logo, $d_{\min} \geq 3$) e que conseguimos encontrar três linhas de soma nula (por exemplo, as linhas 1, 7 e 9). Concluímos assim que $d_{\min} = 3$.

e) Da tabela de factorização de $p^n + 1$ vemos que $p^9 + 1 = 3.7.111 \rightarrow 011.111.001001001$, ou

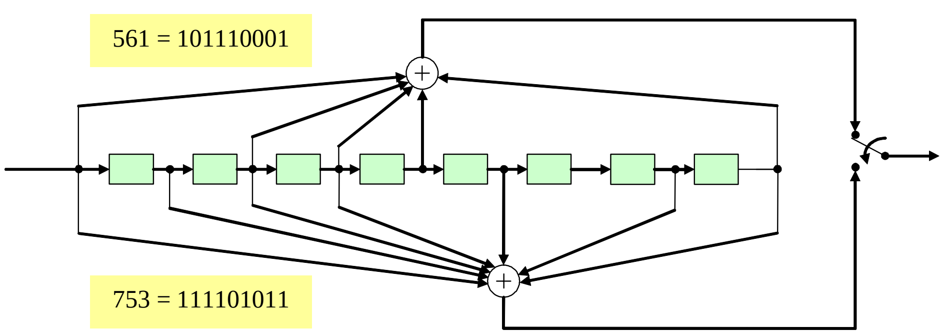
$$p^9 + 1 = (p+1)(p^2 + p + 1)(p^6 + p^3 + 1)$$

O polinómio gerador de um código cíclico com $n = 9$ tem grau $n - k$ e é factor de $p^9 + 1$. Como não há nenhum factor de $p^9 + 1$ com grau 4 concluímos que não existe nenhum código cíclico (9,5). Pelo contrário, o polinómio de grau 6 $g(p) = p^6 + p^3 + 1$ é o único que pode servir como gerador do código (9,3). É este o código escolhido, claro.

3. O codificador convolucional é definido pela matriz $G = [561 \quad 753] = [101110001 \quad 111101011]$. Passando para a forma polinomial obtemos $G(D) = \left[1 + D^2 + D^3 + D^4 + D^8 \quad 1 + D + D^2 + D^3 + D^5 + D^7 + D^8\right]$.

a) A taxa do código é $R_c = 1/2$, o comprimento de restrição é $L = 9$ e existem $2^{L-1} = 2^8 = 256$ estados.

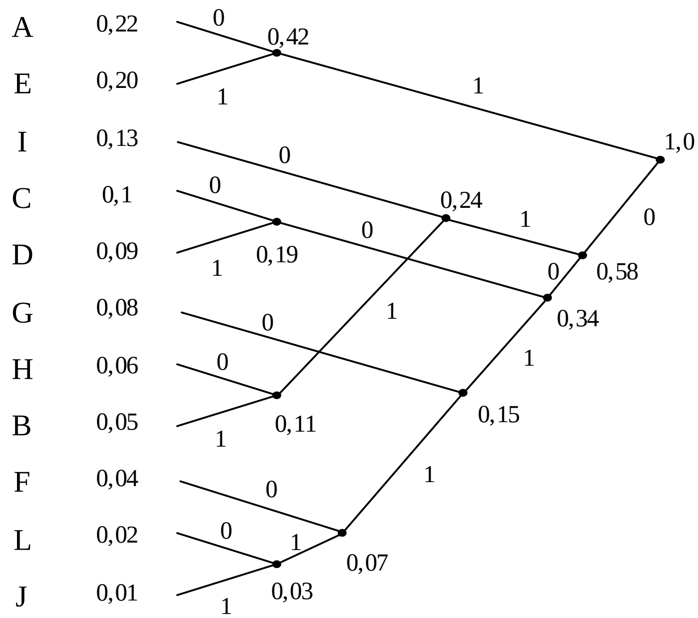
b) Esquema do codificador:



c) Matriz geradora do codificador RSC equivalente: $\tilde{G}(D) = \left[1 \quad \dfrac{1 + D + D^2 + D^3 + D^5 + D^7 + D^8}{1 + D^2 + D^3 + D^4 + D^8}\right]$.

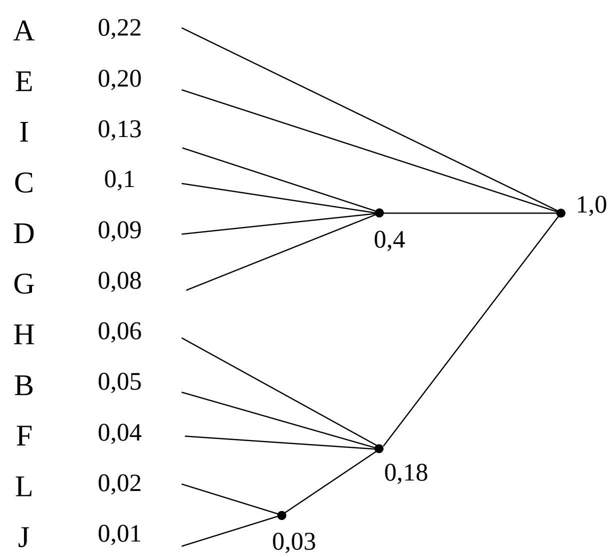
4. Fonte discreta com $h(X)$= 3 bits/letra.

a) Árvore do código de Huffman binário tal que $I \rightarrow 010$:



ABELHA → 10 0111 11 001110 0110 10

b) Tamanho do alfabeto da fonte: $M = 11$. No código de Huffman quaternário ($D = 4$) é preciso proceder a um agrupamento prévio de $2+(M-2)\,\mathrm{mod}(D-1)=2$ letras, obtendo-se então a seguinte árvore de codificação:



Logo, $\bar{N}=\frac{1}{100}\left[22+20+2\times 40+2\times(6+5+4)+3\times(2+1)\right]=1,61$ símbolos quaternários/letra de X. Este valor satisfaz, é claro, o teorema da codificação de fonte pois o código de Huffman é um código sem prefixos:

$$\frac{H(X)}{\log_2 D}\le \bar{N} < \frac{H(X)}{\log_2 D}+1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{2}=1,5\le \bar{N} < 2,5$$

c) A fonte produz r = 1000 letras/s. A taxa de informação da fonte é igual a $R = rH(X) = 1000\times 3 = 3000$ bits/s.

A taxa de transmissão do codificador quaternário é igual a $r_q = r\overline{N} = 1000 \times 1,61 = 1610$ símbolos/s.

d) Com extensão de ordem 2 a nova fonte tem entropia $H(Y) = 2H(X) = 6$ bits/par.

5. Supõe-se que o dicionário contém as entradas A e B antes da codificação. Os apontadores respectivos são 0A e 0B.

a) A sequência de apontadores dada, 1B – 3A – 2A – 5B – 4B – 7A – 6A – 9B, vai replicar o dicionário de codificação preenchendo-o sucessivamente:

Apontador	Entrada	Nº
0A	A	1
0B	B	2
1B	AB	3
3A	ABA	4
2A	BA	5
5B	BAB	6
4B	ABAB	7
7A	ABABA	8
6A	BABA	9
9B	BABAB	10

A mensagem descodificada é AB ABA BA BAB ABAB ABABA BABA BABAB.

b) Cada índice da entrada é representado por $\log_2 64 = 6$ bits e cada sufixo (A e B) precisa de 1 bit. Ao todo cada apontador é representado por 7 bits.

6. Na alínea a) desaconselha-se efectuar a divisão (obriga a demasiados cálculos). É preferível usar o binómio de Newton, com o qual se obtém o quociente pedido de uma maneira muito mais simples.

a) $T(D,L,W) = \dfrac{D^5 L^3 W}{1 - DL(1+L)W}$. Usando o binómio de Newton $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ obtemos logo

$$T(D,L,W) = D^5 L^3 W \left\{1 + DL(1+L)W + \left[DL(1+L)W\right]^2 + \ldots + \left[DL(1+L)W\right]^i + \ldots\right\} =$$
$$= D^5 L^3 W + D^6 L^4 (1+L) W^2 + \ldots + D^{i+5} L^{i+3} (1+L)^i W^{i+1} + \ldots$$

A parcela genérica $D^{i+5} L^{i+3} (1+L)^i W^{i+1}$ ajuda-nos a conhecer os termos em D^5, D^7 e D^{12}:

$$D^5 L^3 W \qquad D^7 L^5 (1+L)^2 W^3 = D^7 L^5 W^3 + 2D^7 L^6 W^3 + D^7 L^7 W^3 \qquad D^{12} L^{10} (1+L)^7 W^8$$

a1) As expressões anteriores indicam que na treliça do codificador:

- existe um percurso de peso 5 (D^5), devido a uma mensagem de entrada com três bits (L^3) dos quais um (W) é um 1.
- existem quatro percursos de peso 7: dois foram originados por uma sequência de entrada de 6 bits e os outros por sequências de 5 e 7 bits. Em qualquer dessas sequências de entrada há três (W^3) "uns".

a2) A distância livre é $d_f = 5$.

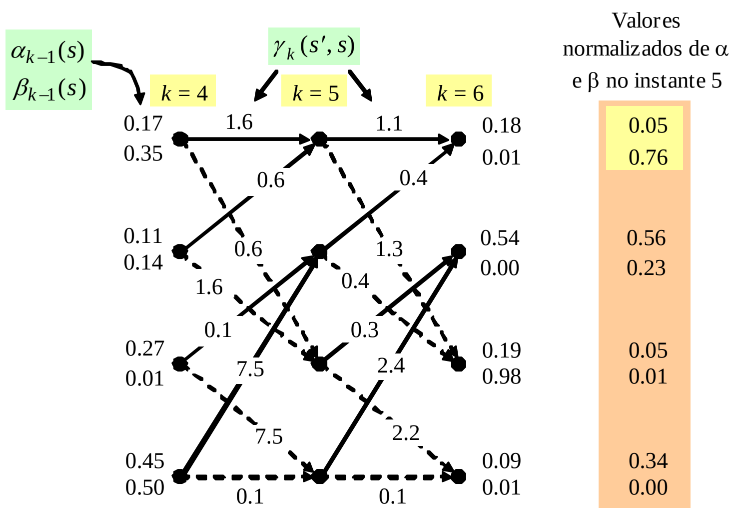
a3) Para calcularmos o número de percursos da treliça que saem do estado nulo e a ele regressam e têm peso 12 fazemos $L = 1$ e $W = 1$ na parcela em D^{12}: $D^{12} L^{10} (1+L)^7 W^8 \Big|_{L=1, W=1} = 2^7 D^{12} = 128 D^{12}$. Concluímos que há 128 percursos de peso 12.

b) $G = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow G(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D+D^2 & 1+D^2 \end{bmatrix}$. O codificador não é catastrófico se se verificar

$$m.d.c.\left(1+D, D+D^2, 1+D^2\right) = D^m \quad m \geq 0$$

Neste caso, $D+D^2 = D(1+D)$ e $1+D^2 = (1+D)^2$. Logo, $m.d.c.\left(1+D, D(1+D), (1+D)^2\right) = 1+D$ e, portanto, o codificador **é catastrófico**.

7. Valores normalizados de α e β nos instantes k = 4, 5 e 6 (ver cálculos abaixo):



Primeiro foi preciso calcular os valores não normalizados e a sua soma no instante 5 (ver exemplos nas alíneas a) e b)):

$$\alpha'_5(0,1,2,3)=\begin{bmatrix}0{,}3380 & 3{,}4020 & 0{,}2780 & 2{,}0700\end{bmatrix} \qquad \sum \alpha'_5 = 6{,}0880$$
$$\beta'_5(0,1,2,3)=\begin{bmatrix}1{,}2850 & 0{,}3960 & 0{,}0220 & 0{,}0010\end{bmatrix} \qquad \sum \beta'_5 = 1{,}7040$$

a) Valor não normalizado: $\alpha'_5(0)=0{,}3380$; valor normalizado: $\alpha_5(0) = \dfrac{\alpha_4(0)\gamma_5(0,0)+\alpha_4(1)\gamma_5(1,0)}{\sum \alpha'_5} = 0{,}0555$.

Não são necessários para a resolução mas aqui estão os valores de α nos quatro estados:

$$\alpha_5(0,1,2,3)=\frac{\alpha'_5(0,1,2,3)}{\sum \alpha'_5} = \frac{\alpha'_5(0,1,2,3)}{6{,}0880} = \begin{bmatrix}0{,}0555 & 0{,}5588 & 0{,}0457 & 0{,}3400\end{bmatrix}$$

b) Valor não normalizado: $\beta'_5(0)=1{,}2850$; valor normalizado: $\beta_5(0) = \dfrac{\beta_6(0)\gamma_6(0,0)+\beta_6(2)\gamma_6(0,2)}{\sum \beta'_5} = 0{,}7541$.

Não são necessários para a resolução mas aqui estão os valores de β nos quatro estados:

$$\beta_5(0,1,2,3) = \frac{\beta'_5(0,1,2,3)}{\sum \beta'_5} = \frac{\beta'_5(0,1,2,3)}{1{,}7040} = \begin{bmatrix}0{,}7541 & 0{,}2324 & 0{,}0129 & 0{,}0006\end{bmatrix}$$

c) A probabilidade pedida é um produto $\alpha\gamma\beta$: $P(3,1,\mathbf{y}) = \alpha_4(3)\gamma_5(3,1)\beta_5(1) = 0{,}45\times 7{,}5\times 0{,}23 = 0{,}7763$ (valor não normalizado).