Resolução

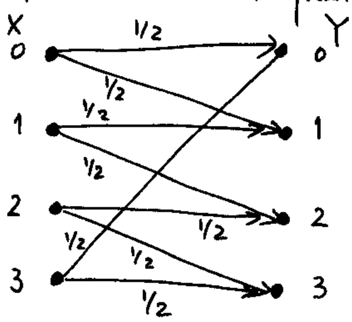
T.I. (2001-2002)

Exame de 2ª chamada (8-7-02)

1.
$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$C = \max I(X;Y) = \max \left[H(Y) - H(Y|X) \right]$$

a) Trata-se do canal quaternário $X \rightarrow Y$



Todas as entropias condicionais $H(Y|u_i)$ são iguais:

$$H(Y|u_i) = \Omega(1/2) = 1 \qquad i = 0,1,2,3$$

Assim, $H(Y|X) = H(Y|u_i)\left[\underbrace{P(u_0) + \ldots + P(u_3)}_{1}\right] = H(Y|u_i) = 1$

$P(Y_0) = \frac{1}{2}\left[P(u_0) + P(u_3)\right]$

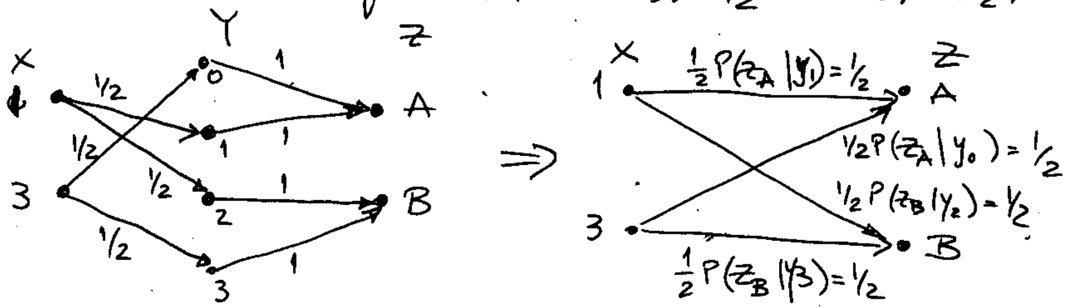
$P(Y_1) = \frac{1}{2}\left[P(u_1) + P(u_2)\right]$

etc.

A entropia $H(Y)$ é máxima se $P(y_i) = 1/4$, o que acontece se os símbolos da fonte X forem equiprováveis.

Logo, $C = \max_Y H(Y) - H(Y|X) = \log_2 4 - 1 = 1$ bit/símb.

b) Passamos a ter (dado que $P(u_1) = P(u_3) = 1/2$ e $P(u_0) = P(u_2) = 0$)



O canal $X \to Z$ é um canal BSC inútil pois a probabil. de tran[sição] é 1/2 (equivale a deitar uma moeda ao ar). A informa[ção] mútua média entre a entrada e a saída, $I(X;Z) = H(Z) - H(Z|X)$ terá de ser nula:

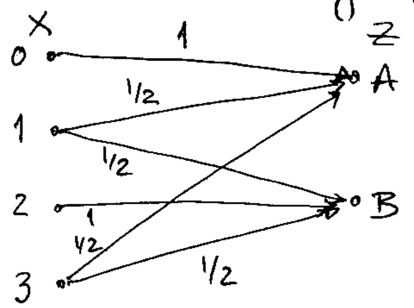
$$H(Z|u_1) = H(Z|u_3) = H(1/2, 1/2) = 1$$

$$H(Z|X) = \underbrace{\left[P(u_1) + P(u_3)\right]}_{1} H(Z|u_i) = 1$$

$$P(Z_A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1/2 = P(Z_B) \Rightarrow H(Z) = 1$$

$\Longrightarrow \quad I(X;Z) = 1 - 1 = 0$, como se esperava.

c) O canal $X \to Z$ é agora, genericamente,



$$H(Z|u_0) = H(1;0) = 0 = H(Z|u_2)$$

$$H(Z|u_1) = H(1/2;1/2) = 1 = H(Z|u_3)$$

$$\Rightarrow H(Z|X) = \sum_{i=0}^{3} p(u_i) H(Z|u_i) = P(u_1) + P(u_3)$$

$$P(Z_A) = P(u_0) + 1/2\left[P(u_1) + P(u_3)\right] = 1 - P(Z_B)$$

$$I(X;Z) = H(Z) - H(Z|X)$$

A capacidade obtém-se maximizando $I(X;Z)$ em ordem às probabilidades da fonte X.

Poderemos pensar que a capacidade se obtém se os símbolos de X forem equiprováveis, caso em que $P(Z_A) = P(Z_B) = 1/2$ e

$$I(X;Z) = \underbrace{H(1/2;1/2)}_{1} - \underbrace{\left(P(u_1) + P(u_3)\right)}_{1/2} = 1/2 \text{ bit/simb.}$$

Este não é, no entanto, o valor máximo. De facto, não basta maximizar $H(Z)$, é preciso é maximizar a diferença $H(Z) - H(Z|X)$. Ora $H(Z|X) = 0$ se $P(u_1) = P(u_3) = 0 \Rightarrow P(u_0) + P(u_2) = 1$ e $H(Z)$ será máximo se $P(Z_A) = P(Z_B) = 1/2$, o que acontece se $P(u_0) = 1/2 \Rightarrow C = \max(H(Z) - H(Z|X)) = 1 - 0 = 1$ bit/simb.

2. Cada soma demora dois segundos e dispomos dos seis números nos instantes seguintes:

a_1 — $t_1 = 1$ segundo

a_2 — $t_2 = 4$

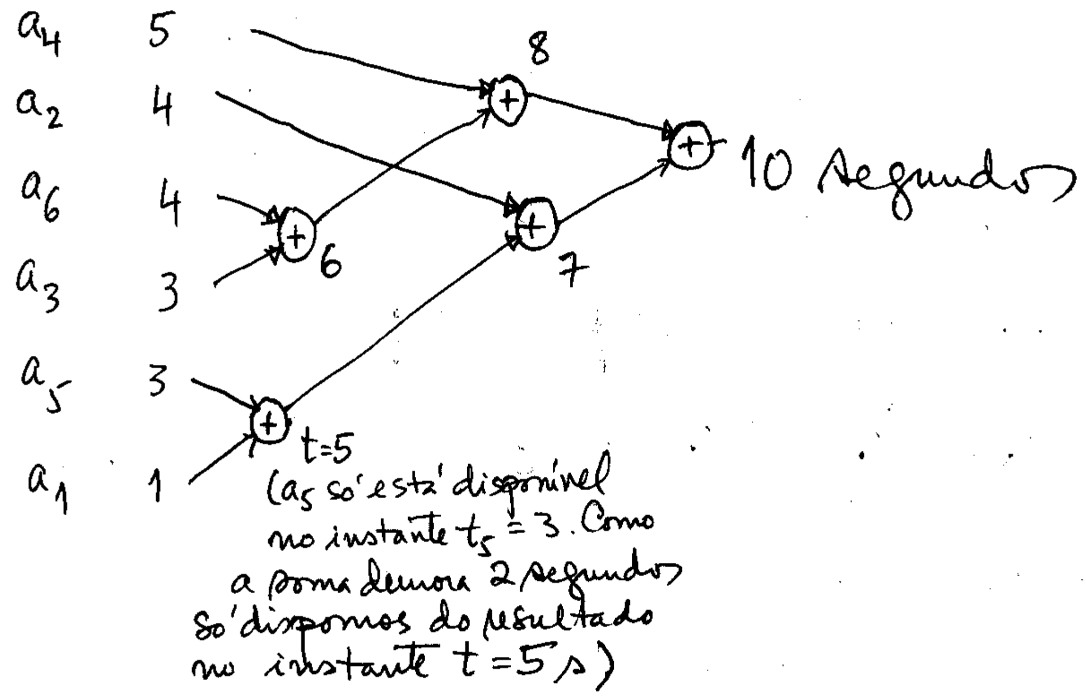
a_3 — $t_3 = 3$

a_4 — $t_4 = 5$

a_5 — $t_5 = 3$

a_6 — $t_6 = 4$

a) Vamos usar a codificação de Huffman para determinar o menor tempo possível necessário para somar tudo:



b) O resultado $\sum_{i=1}^{6} a_i$ é obtido no instante $t = 10\,s$.

3. Ver à parte.

4. Idem.

3.

$$G=\begin{bmatrix} p^{n-1}+p^{n-1} \bmod g(p) \\ p^{n-2}+p^{n-2} \bmod g(p) \\ p^{n-3}+p^{n-3} \bmod g(p) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1001110 \\ 0100111 \\ 0011101 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H=\begin{bmatrix} 1110 \\ 0111 \\ 1101 \\ 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{bmatrix}$$

a) Basta somar a primeira e a terceira linhas de **G**, o que dá: [1010011].

b) $\mathbf{S}=\mathbf{ZH}=[0101010]\mathbf{H}=\sum(\text{linhas}2,4 \text{ e } 6)=[1101]$. É igual à terceira linha de **H**, logo $\mathbf{E}=[0010000]$, isto é, $\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{Z}+\mathbf{E}=[0111010]$.

c) Não há linhas iguais em **H**, logo $d_{\min}\geq 3$. Mas todas as linhas têm peso ímpar, logo $d_{\min}\geq 4$. A soma das quatro linhas 1, 2 4 e 7, por exemplo, é nula, logo $d_{\min}=4$.

4. a) Se $t=1$ então $d_{\min}\geq 3$, não podendo haver duas linhas em ***H*** cuja soma dê 0. A seguinte matriz é uma solução possível:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Se somar as duas palavras ternárias 1011 e 2101 dá 0112, que pertence ao código. Esta e a primeira são as duas linhas da matriz ***G***:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} \text{ é o da alínea a).}$$

A síndrome obtém-se multiplicando 1122 por ***H***:

$$\mathbf{S}=[1+1+2+0 \quad 1+2+0+2] \bmod 3=[1 \quad 2]$$

5 - a) LZ 78

Dicionário inicial:
(e dicionário preenchido)

Nº	Entrada	
1	espaço	Inicial
2	A	
3	I	
4	R	
5	T	
6	TA	
7	TAR	
8	AT	
9	ATA	
10	␣T	
11	ATAR	
12	ATAT	
13	A␣	
14	IR	
15	RA	

Sequência a descodificar:
(5,A) (6,R) (2,T) (8,A) (1,T)
(9,R) (9,T) (2, espaço) (3,R) (4,A)

Sequência descodificada:
"TATARATATA␣TATARATATA␣IRRA"

b) LZ 77

							T	R	E	S	_	T	R	I	S	T	E	S	_	T	I	G	R	E S .

(5,2,I) (5,1,T) (8,4,I) (0,0,G) (10,1,E) (7,1,•)

c) Tamanho do alfabeto da fonte : 8 ⟶ 3 bits
Tamanho do "look-ahead buffer" : 5 ⟶ 3 bits
Tamanho do corpo da janela : 12 ⟶ 4 bits

Nº de bits por apontador de saída : 3+3+4 = 10 bits
Nº de apontadores : 6 ⟹ 60 bits ao todo

6 - Ver à parte

6. a) $P_{end}=\sum_{i=1}^{n}A_i p^i(1-p)^{n-i}$. Palavras de código: as de G e também [000000] e [110110]. Assim, $A_4=2$ e $A_5=1$ e, portanto,

$$P_{end}=A_4p^4(1-p)^2+A_5p^5(1-p)=$$
$$=2p^4(1-p)^2+p^5(1-p)=1{,}997.10^{-12}\approx 2.10^{-12}$$

Ocorre um erro não detectado em cada $1/P_{end}$ bits. Este número de bits demora $\dfrac{1}{P_{end}R}=5{,}00751.10^5=500751$ s = 139,1 h.

b) Plotkin: $d_{\min}\le\dfrac{n.2^{k-1}}{2^k-1}=4$. Em concreto neste código é $d_{\min}=3$ (recorrendo a **H**, que tem uma linha de peso par).

c) Da tabela de factorização de polinómios temos que $p^6+1=(p+1)^2(p^2+p+1)^2$. Assim, o polinómio gerador, de 4º grau, só pode ser

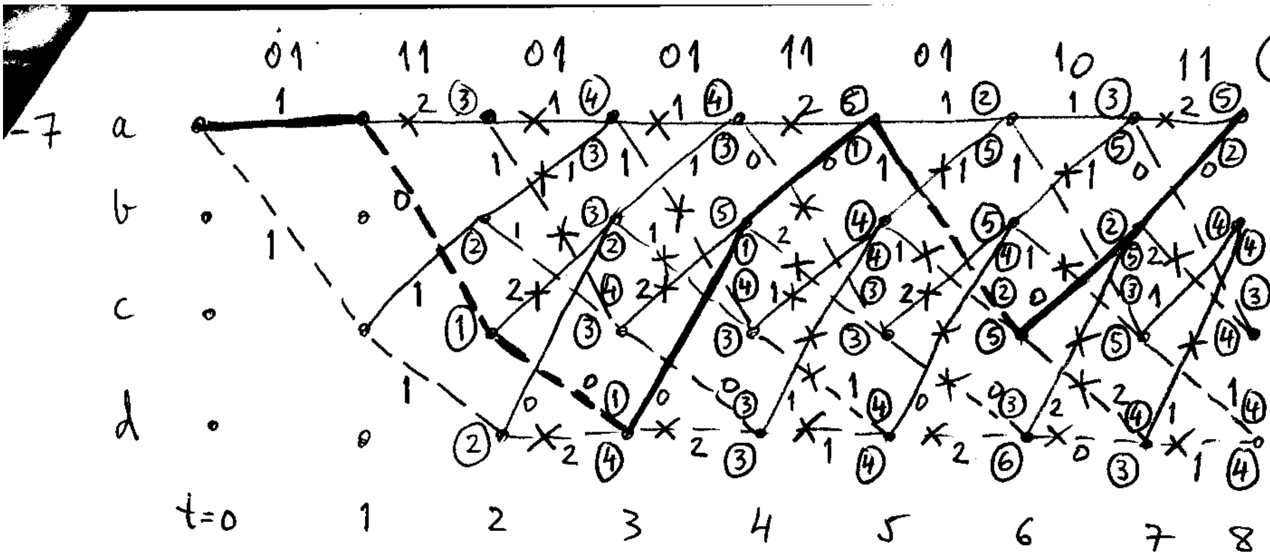
$$g(p)=(p+1)^2(p^2+p+1)=p^4+p^3+p+1.$$

d) O código aumentado (7, 2) só tem palavras de peso par, ou seja, 0000000, 0110011, 1011111 e 1101100. Portanto, A_i=0, i=1, 2, 3, 7, e $A_4=2$ e $A_6=1$. O polinómio enumerador de pesos é $A(z)=\sum_{i=0}^{n}A_z z^i=1+A_4z^4+A_6z^6=1+2z^4+z^6$.

e) O débito binário no canal, r, está relacionado com o débito da fonte, r_b, através da eficiência do sistema ARQ: $r=r_b/R_c'$. No caso de ARQ SR a eficiência vale

$$R_c'=\frac{k}{n}(1-p_R)\approx\frac{k}{n}(1-np)=\frac{2}{7}\times 0{,}993=0{,}284$$

Assim, $r=r_b/R_c'=352\ 467$ bits/s $\approx 352{,}4$ kbits/s.



No instante $t=8$ há quatro sobreviventes de métricas 2, 4, 3 e 4. Se a seguir vier uma cauda de "0"s de informação para se regressar ao estado nulo da treliça o percurso que ficará sempre c/ menor métrica acumulada é o que em cima tem métrica 2 (e já está no estado nulo). Será esse o percurso sobrevivente final. Portanto:

$Y+\hat{E}$: 0<u>0</u> 11 01 01 11 <u>1</u>1 10 11

X : 0 1 1 0 0 1 0 0

A sequência Y continha dois erros.