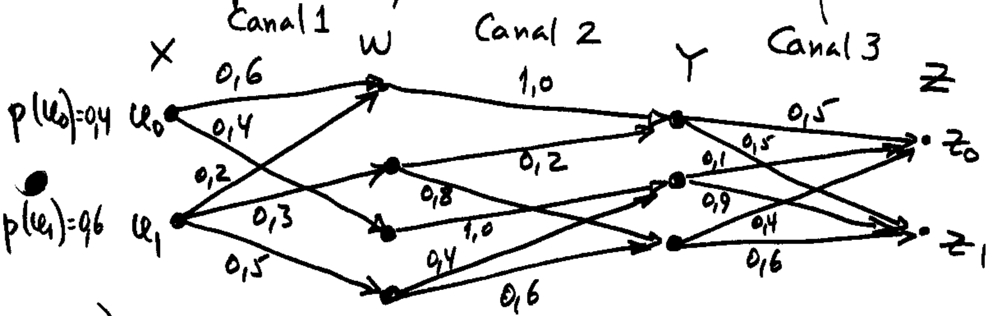
Resolução

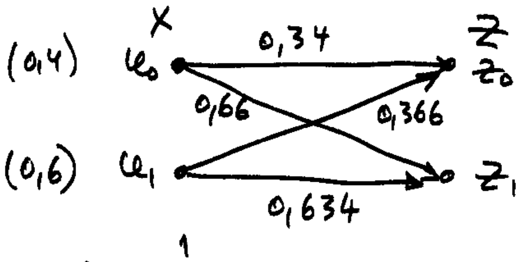
2 – A soma das probabilidades (condicionais) dos ramos oriundos de um determinado nó é sempre um. Assim, a representação, com todas as probabilidades, é:



a) A matriz de probabilidades de transição do canal $X \to Z$ é igual ao produto das três matrizes individuais:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}}_{(C1)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}}_{(C2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}}_{(C3)} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}26 & 0{,}2 & 0{,}54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}366 & 0{,}634 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(z_0|x_0) & p(z_1|x_0) \\ p(z_0|x_1) & p(z_1|x_1) \end{bmatrix}$$



(Não é BSC)

b) $H(W|X) = \sum_{i=0}^{1} p(x_i) H(W|x_i) = p(x_0) H(W|x_0) + p(x_1) H(W|x_1) =$

$$= p(x_0) H(\underbrace{0{,}6;\ 0;\ 0{,}4;\ 0}_{1^{\text{a}}\text{ linha da matriz } C_1}) + p(x_1) H(\underbrace{0{,}2;\ 0{,}3;\ 0;\ 0{,}5}_{2^{\text{a}}\text{ linha de } C_1}) =$$

Substituindo valores:

$$H(W|X) = 0{,}4 \times 0{,}9710 + 0{,}6 \times 1{,}4855 = 1{,}2797$$

c) Queremos $I(X,Z) = H(Z) - H(Z|X)$

$$H(Z|X) = p(u_0)H(Z|u_0) + p(u_1)H(Z|u_1) =$$

$$= p(u_0)\underbrace{H(0{,}34)}_{\Omega(0{,}34)} + p(u_1)H(0{,}366) = 0{,}9385$$

$$H(Z) = H[p(z_0)] = H(0{,}356) = 0{,}9393 \text{ bits/símbolo}$$

(Pois $p(z_0) = p(u_0)p(z_0|u_0) + p(u_1)p(z_0|u_1) =$

$= 0{,}4 \times 0{,}34 + 0{,}6 \times 0{,}366 = 0{,}356$)

Portanto, $I(X,Z) = 0{,}9393 - 0{,}9385 = 0{,}0008$.

3.
$$\frac{H(X)}{\log D} \leq \bar{N} < \frac{H(X)}{\log D} + \frac{1}{L}$$

D – tamanho do alfabeto do código

$\bar{N}$ – Comprim. médio

L – agrupamento (extensão) de L símbolos

Sendo $L = 3$ e Huffman (que, evidentemente, satisfaz o teorema) quaternário ($D = 4$):

$$\frac{H(X)}{2} \leq \bar{N} < \frac{H(X)}{2} + \frac{1}{3}$$

4. O padrão de erro é $e(p) = p^{n-1} \Rightarrow S(p) = p^{n-1} \bmod g(p)$, ou $S(p) = \frac{p^n}{p} \bmod g(p)$. Ora $p^n + 1 = Q(p)\,g(p)$, em que $Q(p)$ tem grau K. Como $g(p)$ contém o termo 1 $Q(p)$ também tem de o conter (senão não apareceria no 1º membro, $p^n + \underline{\underline{1}}$). Logo, podemos escrever $Q(p) = p\,b(p) + 1$, em que $b(p)$ é um polinómio desconhecido. Assim:

$$S(p) = \frac{p^n}{p} \bmod g(p) = \frac{Q(p)g(p)+1}{p} \bmod g(p) = \frac{[p\,b(p)+1]g(p)+1}{p} \bmod g(p)$$

$$= \underbrace{\frac{\cancel{p}\,b(p)g(p)}{\cancel{p}} \bmod g(p)}_{0} + \frac{g(p)+1}{p} \bmod g(p) = \frac{g(p)+1}{p} \bmod g(p)$$

Como $\frac{g(p)+1}{p}$ tem grau inferior a $g(p) \Rightarrow S(p) = \frac{g(p)+1}{p}$ c.q.d.

5 - a) Cada entrada do dicionário de 32 entradas é representada por 5 bits e como temos 4 letras cada uma é representada por 2 bits; isto é, cada secção de letras codificadas usa 5+2=7 bits. Assim, teremos: (3)

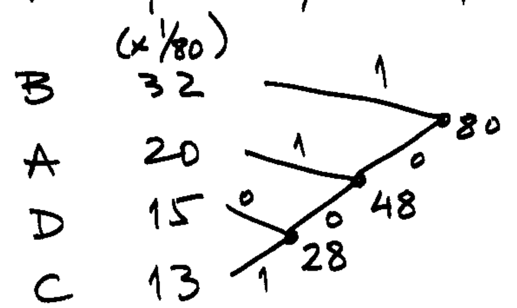
0111001/0100001/1101001/1100100/1100011/0011011/
0010111/0101001

Os dois últimos bits representam uma das quatro letras e os primeiros cinco representam o cardinal da entrada. Continuando o dicionário

25 - 01110.01 → 14B → BAB
26 - 01000.01 → 8B → BBB
27 - 11010.01 → 26B → BBBB
28 - 11001.00 → 25A → BABA
29 - 11000.11 → 24D → DDCD
30 - 00110.11 → 6D → ABCD
31 - 00101.11 → 5D → ABD
32 - 01010.01 → 10B → DDB

Portanto, a sequência restante descodificada é

BAB/BBB/BBBB/BABA/DDCD/ABCD/ABD/DDB

b)


B - 1
A - 01
D - 000
C - 001

$\Rightarrow \bar{N} = \frac{156}{80} = 1{,}95$

c) Entropia : $H\left(\frac{32}{80}, \frac{20}{80}, \frac{15}{80}, \frac{13}{80}\right) = 1{,}9076$ bits/letra

d) Eficiência : $\frac{H}{\bar{N}} = \frac{1{,}9076}{1{,}95} = 97{,}8\%$

6 - Código ternário $(4,2)$ e $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Todas as operações são feitas mód. 3 (só existem os símbolos 0, 1 e 2).

a) Existem $D^k = 3^2 = 9$ palavras de código ternárias (de 4 símbolos cada)

b)

Informação		Paridade $c_1\,c_2$	Palavra de código
0 0	$\longrightarrow$ 0 0	$\longrightarrow$ 0 0	00 00
0 1	$\longrightarrow$ 2 2	$\longrightarrow$ 2 2	01 22
1 0	$\longrightarrow$ 1 2	$\longrightarrow$ 1 2	10 12
1 1	$\longrightarrow$ 1+2 2+2	$\longrightarrow$ 0 1	11 01
0 2	$\longrightarrow$ 4 mod 3 4 mod 3	$\longrightarrow$ 1 1	02 11
2 0	$\longrightarrow$ 2 4 mod 3	$\longrightarrow$ 2 1	20 21
2 2	$\longrightarrow$ 2+1 1+1	$\longrightarrow$ 0 2	22 02
1 2	$\longrightarrow$ 1+1 2+1	$\longrightarrow$ 2 0	12 20
2 1	$\longrightarrow$ 2+2 1+2	$\longrightarrow$ 1 0	21 10

(da matriz geradora tira-se que $\begin{cases} c_1 = u_1 + 2u_2 \\ c_2 = 2u_1 + 2u_2 \end{cases}$ (mod 3))

c) Agora teremos $H = \begin{bmatrix} P \\ \hline Q \end{bmatrix}$, sendo $G = [I_k \mid P]$

Sabemos que $GH = \underline{0}^{(k\times(n-k))}$ logo terá de verificar-se que $I_k + Q = 0 \pmod 3$ *, ou seja, neste caso: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Em conclusão: $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

* $GH = [I_k \mid P] \begin{bmatrix} P \\ \hline Q \end{bmatrix} = I_k P + PQ = P(I_k + Q) = \underline{0}$

$\Rightarrow I_k + Q = 0 \pmod D$

7- $g(p) = p^{10}+p^9+p^8+p^6+p^5+p^3+1$, $n=31 \Rightarrow k=21$ (5)

a) $Y(p) = p^{n-k}X(p) + p^{n-k}X(p) \bmod g(p)$

$X(p) = p^2+p \Rightarrow p^{n-k}X(p) = p^{10}X(p) = p^{12}+p^{11}$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{p^{12}}+\cancel{p^{11}} & p^{10}+p^9+p^8+p^6+p^5+p^3+1 \\
\cancel{p^{12}}+\cancel{p^{11}}+p^{10}+p^8+p^7+p^5+p^2 & \overline{p^2+1} \\
\hline
\cancel{p^{10}}+\cancel{p^8}+p^7+\cancel{p^5}+p^2 & \\
\cancel{p^{10}}+p^9+\cancel{p^8}+p^6+\cancel{p^5}+p^3+1 & \\
\hline
p^9+p^7+p^6+p^3+p^2+1 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow Y(p) = p^{12}+p^{11}+p^9+p^7+p^6+p^3+p^2+1$

b) Limite de Plotkin: $d_{min} \leq \dfrac{n \cdot 2^{k-1}}{2^k-1} = \dfrac{31 \times 2^{20}}{2^{21}-1} = 15{,}5$

$\Rightarrow d_{min} \leq \underline{\underline{15}}$

c) Pelo limite de Hamming temos:

$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \Rightarrow 2^{10} = 1024 \geq 1+31+\underbrace{\binom{31}{2}}_{465} = 497$

$\left(\binom{31}{3} = 4495\text{: não serve!}\right)$

No máximo o código corrige erros duplos $(t=2)$.

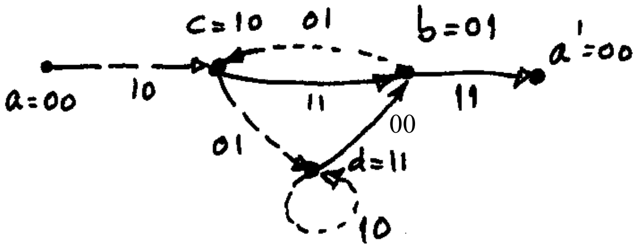
d) $s(p) = (p^{11}+p^{10}+p^7+p^6+p^4+p) \bmod g(p)$

Fazendo as contas: $S(p) = p^9$

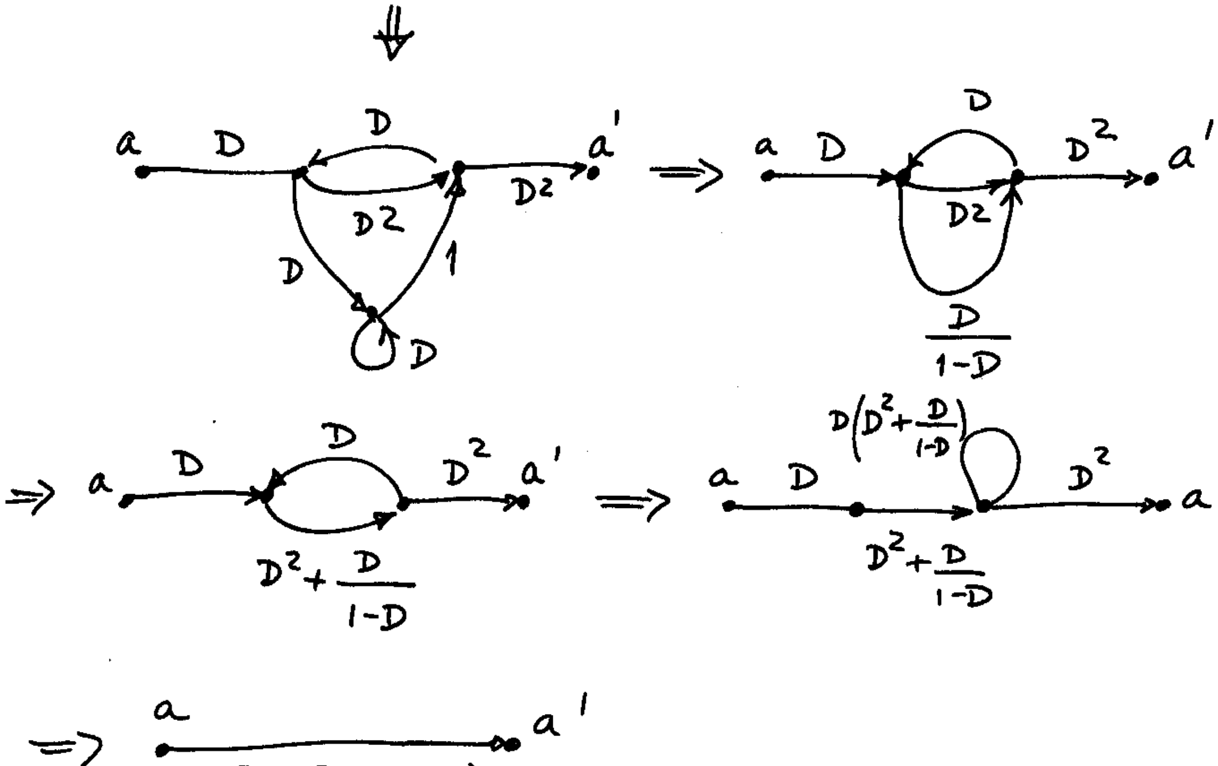
e) Rajada de 8 erros: é detectada pois o descodificador detecta todas as rajadas c/ $n-k=10$ erros ou menos.

Rajada de 12 erros: pode não ser detectada. Provavelmente será detectada pois $1-2^{-(n-k)} \approx 99{,}9\%$ das rajadas de comprimento $> n-k+1 = 11$ são detectadas.

a)



⇓



$$T(D) = \frac{D^3\left(D^2 + \frac{D}{1-D}\right)}{1 - D\left(D^2 + \frac{D}{1-D}\right)}$$

Simplificando: $T(D) = \frac{D^4 + D^5 - D^6}{1 - D - D^2 - D^3 + D^4} = D^4 + 2D^5 + 2D^6 + \dots$

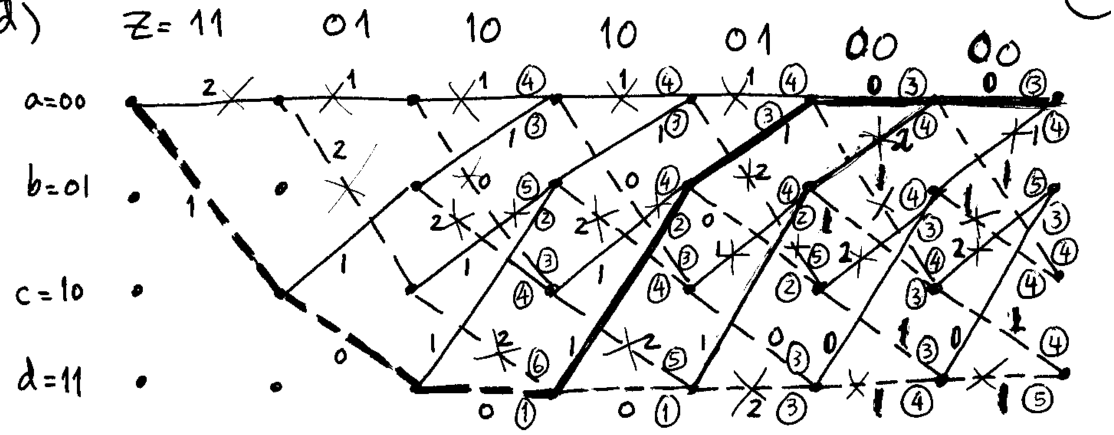
⇒ Distância livre: $d_f = 4$

b) Ver acima

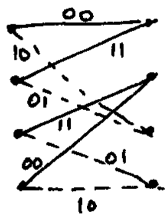
c) Percursos de peso 4 : 1

" " " 6 : 2

d)



"Trellis"



Sequência mais provável:

11100