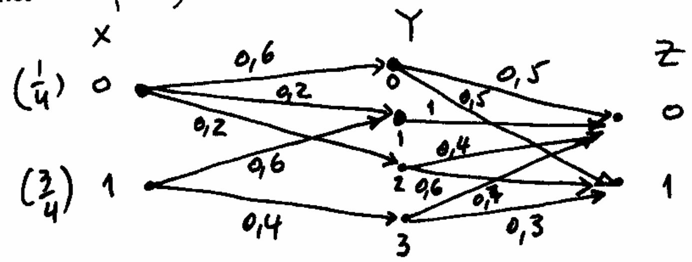
Resolução

3. (ver no fim)

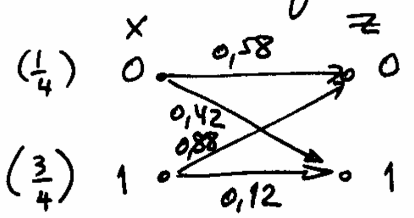
4.



$$P[Y|X] = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \quad P[Z|Y] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 \\ 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix}$$

$$P[Z|X] = P[Y|X]\,P[Z|Y] = \begin{bmatrix} 0,58 & 0,42 \\ 0,88 & 0,12 \end{bmatrix}$$

- Canal binário equivalente:



$P(Z=0) = \frac{1}{4} \times 0,58 + \frac{3}{4} \times 0,88 = 0,805$

$P(Z=1) = 0,195$

$H(Z) = \Omega(0,805) = 0,7118$ bits/símb.

- Canal $X \longrightarrow Y$

$P(Y=0) = \frac{1}{4} \times 0,6 = 0,15$

$P(Y=2) = \frac{1}{4} \times 0,2 = 0,05 \quad \Rightarrow P(Y=1) = 0,5$

$P(Y=3) = \frac{3}{4} \times 0,4 = 0,3$

a) $H(Y) = H(0,15;\ 0,5;\ 0,05;\ 0,3) = 1,6477$ bits/símbolo

b) $P(Z=0|X=0) = 0,58$ (de cima)

c) $H(Z) = 0,7118$ (de cima)

d) $I(X=0,Y=1) = \log_2 \frac{P(Y=1|X=0)}{P(Y_1)} = \log_2 \frac{0,2}{0,5} = -1,322$

e) $I(X;Z) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} P(x_i)\,P(z_j|x_i) \log_2 \frac{P(z_j|x_i)}{P(z_j)} =$

$$I(X;Z) = \frac{1}{4}\left[0{,}58 \log \frac{0{,}58}{0{,}805} + 0{,}42 \log \frac{0{,}42}{0{,}195}\right] +$$

$$+ \frac{3}{4}\left(0{,}88 \log \frac{0{,}88}{0{,}805} + 0{,}12 \log \frac{0{,}12}{0{,}195}\right) = 0{,}0694$$

f) Está a ser pedida a informação mútua média $I(X;Y)$:

$$I(X;Y) = \frac{1}{4}\left(0{,}6 \log \frac{0{,}6}{0{,}15} + 0{,}2 \log \frac{0{,}2}{0{,}5} + 0{,}2 \log \frac{0{,}2}{0{,}05}\right) +$$

$$+ \frac{3}{4}\left(0{,}6 \log \frac{0{,}6}{0{,}5} + 0{,}4 \log \frac{0{,}4}{0{,}3}\right) = 0{,}5768$$

A incerteza sobre X foi reduzida de 0,58 bits devido à observação de Y.

6-

$B = 20\,kHz$

$R_b = 10\ kbits/s$

$E_b = 0{,}1\ mJ$

$B_1 = 30\,kHz$

$$75\,mW = N_0 B_1 \Rightarrow N_0 = \frac{0{,}075}{30.10^3} = 0{,}25.10^{-5}\ W/Hz$$

$$\text{Assim, } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potência do ruído}}}{N} = N_0 B = \frac{0{,}075}{30.10^3} \cdot 20.10^3 = 0{,}05\,W$$

a) $\dfrac{E_b}{N_0} = \dfrac{0{,}1.10^{-3}}{0{,}25.10^{-5}} = 40 \quad (\Rightarrow 16\,dB)$; $\dfrac{S}{N} = \dfrac{E_b R_b}{N} = 20\ (13\,dB)$

b) $C = B \log_2\left(1+\dfrac{S}{N}\right) = 20.10^3 \log_2\left(1+\dfrac{1}{0{,}05}\right) = 87846$ bits/s

$S = E_b R_b = 0{,}1.10^{-3} \times 10^4 = 1\,W$

c) $C_\infty \approx 1{,}44 \dfrac{S}{N_0} = 1{,}44 \dfrac{1}{0{,}25.10^{-5}} = 576$ kbits/s

Reordenando as equações:

$$y_4 = y_1 + y_3 \qquad y_7 = y_2 + y_3 \qquad y_{10} = y_1 + y_2$$
$$y_5 = y_3 \qquad y_8 = y_1 + y_2$$
$$y_6 = y_1 + y_3 \qquad y_9 = y_2$$

Quer dizer que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O código sistemático tem palavras $Y = [u_1\ u_2\ u_3\ c_1 \dots c_7]$ (repare-se que nas equações só $y_1\ (=u_1)$, $y_2\ (=u_2)$ e $y_3\ (=u_3)$ é que aparecem repetidas; por exemplo, $y_4\ (=c_1)$ só aparece numa equação).

a) Assim: $G = [\,I_3 \mid P\,]$

b) As 8 palavras de código obtêm-se somando linhas de G:

	Pesos
0 0 0 ⋮ 0 0 0 0 0 0 0	0
1 0 0 ⋮ 1 0 1 0 1 0 1	5
0 1 0 ⋮ 0 0 0 1 1 1 1	5
0 0 1 ⋮ 1 1 1 1 0 0 0	5
1 0 1 ⋮ 0 1 0 1 1 0 1	6
1 1 0 ⋮ 1 0 1 1 0 1 0	6
0 1 1 ⋮ 1 1 1 0 1 1 1	8
1 1 1 ⋮ 0 1 0 0 0 1 0	5

$d_{min} = 5$

Só estas palavras de 10 bits é que correspondem aos padrões de erros não detectáveis.

$\Rightarrow$ Todos os padrões de 2, 3, 4, 7, 9 e 10 erros são detectáveis.

$\Rightarrow$ Dos $\binom{10}{5} = 252$ padrões de 5 erros há $A_5 = 4$ que não são detectáveis $\Rightarrow$ fracção de detectáveis $= \frac{248}{252} = \frac{62}{63} = 98{,}4\%$

$\Rightarrow$ De igual modo c/ padrões de 8 erros $\rightarrow \frac{44}{45} = 97{,}8\%$

c) Distribuição de pesos : $A_0 = 1$

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0 = A_7 = A_9 = A_{10}$

$A_5 = 4$

$A_6 = 2$

$A_8 = 1$

$$P_{end} = \sum_{i=d_{min}}^{10} A_i \, p^i (1-p)^{n-i} = A_5 p^5 (1-p)^5 + A_6 p^6 (1-p)^4 + A_8 p^8 (1-p)^2 =$$

$$= 3{,}98 . 10^{-15} \quad (\text{com } p = 10^{-3})$$

$$(\text{ou } 3{,}99 . 10^{-20} \quad , \text{c/ } p = 10^{-4})$$

d) Limite de Hamming $\quad 2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}$

A matriz-padrão tem $2^{n-k} = 2^7 = 128$ linhas

Padrões de 1 erro $= \binom{10}{1} = 10$

" " 2 " $= \binom{10}{2} = 45$

" " 3 " $= \binom{10}{3} = 120$ ← já não cabem todos.

O código não é perfeito (só os de Hamming e Golay(23,12) o são).

e) $Z = [0110101101]$

Síndrome : $S = ZH = [1\,0\,1\,1\,0\,1\,0]$

O código (10,3) dado tem $t = 2$, isto é, todos os padrões c/ 1 ou 2 erros são corrigíveis. Esta síndrome não é igual a nenhuma linha de H ($\Rightarrow$ corresponde a $\neq$ 1 erro) mas é igual à soma das 1ª e 2ª linhas:

$$\begin{array}{r} 1010101 \\ +\ 0001111 \\ \hline 1011010 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Os dois primeiros bits estão errados, logo

$\hat{Y} = Z + \hat{E} = [1010101101]$

E a mensagem original é $\hat{X} = [101]$.

(5)

7) Viu-se que $G = [I_3 | P]$. Se o encurtamento se faz eliminando o 2.º bit de informação a matriz geradora respectiva obtém-se eliminando a 2.ª linha e a 2.ª coluna de G:

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

H' obtém-se eliminando a 2.ª linha de H:

$$H' = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ \hline I_7 \end{bmatrix}$$

8) $z(p) = p^6 + p^5 + p^3 + p$ e código cíclico (25,20).
Da tabela de factorização vemos que

$p^{25}+1 \Rightarrow 6.76.4102041$

110 111110 1000010000100001000001

$(1+p)(1+p+p^2+p^3+p^4)$ $(1+p^5+p^{10}+p^{15}+p^{20})$

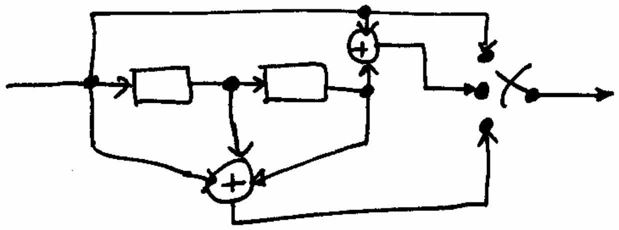
Só há um polinómio de grau $n-k=5$ que seja submúltiplo de $p^{25}+1$ $\longrightarrow$ $g(p) = (1+p)(1+p+p^2+p^3+p^4) = p^5+1$

A síndrome obtém-se de $z(p) \bmod g(p)$:

$$\begin{array}{l|l} p^6+p^5+p^3+p & p^5+1 \\ \underline{p^6 \qquad\quad\;\; +p} & p+1 \\ \quad p^5+p^3 & \\ \quad \underline{p^5 \quad\; +1} & \\ \qquad p^3+1 & \end{array}$$

síndrome

9.

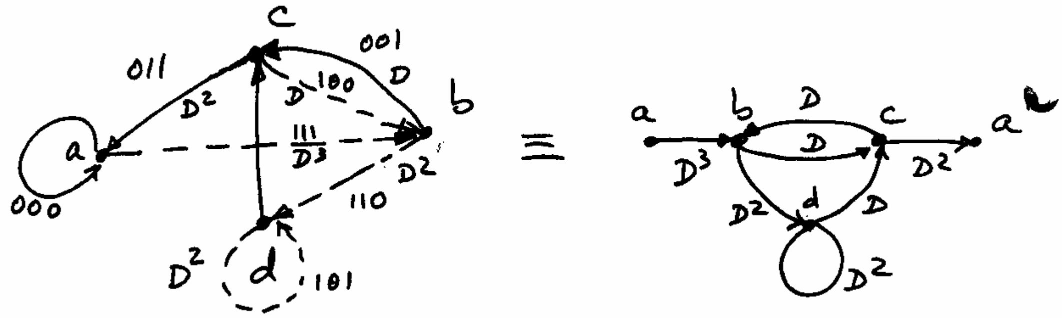


a) Nº de estados : 4

Comprim. de restrição : 3

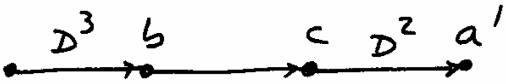
Taxa do código : 1/3

b) Diagrama de estados :



Por inspecção visual vê-se que $d_f = 6$. Também se poderia usar a função de transferência mas neste caso simples não é preciso.

c) Cálculo da f. transferência



$$\frac{D + \frac{D^3}{1-D^2}}{1-\left(D^2 + \frac{D^4}{1-D^2}\right)} = \frac{D(1-D^2+D^3}{(1-D^2)^2 - D^4}$$

$$T(D) = \frac{D^6}{1-2D^2} = D^6 + 2D^8 + 4D^{10} + \ldots$$

Percursos de peso :

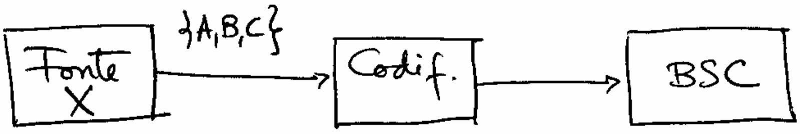
6 ⟶ um

7 ⟶ nenhum

8 ⟶ dois

10 ⟶ quatro

5.



a) A fonte produz r letras/s. A sua entropia é

$$H(0{,}5;0{,}3;0{,}2) = 0{,}5\log\frac{1}{0{,}5} + 0{,}3\log\frac{1}{0{,}3} + 0{,}2\log\frac{1}{0{,}2} = 1{,}4855 \text{ bits/letra}$$

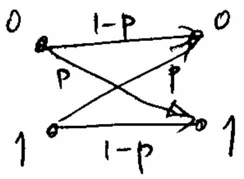
O seu ritmo de informação (em bits/s) é

$$R = rH(x)$$

NA codificação não se ganha nem se perde informação pelo que o seu ritmo de informação (binário) é também R bits/s. Sabemos que através do canal BSC passam $r_b = 100$ dígitos binários/s. O ritmo máximo de informação que passa através do canal é $r_b C$, em que C é a capacidade (em bits/dígito binário)

$$\Rightarrow R = rH(x) < r_b C \Rightarrow r < r_b \frac{C}{H(x)}$$

Falta calcular a capacidade do canal binário simétrico:

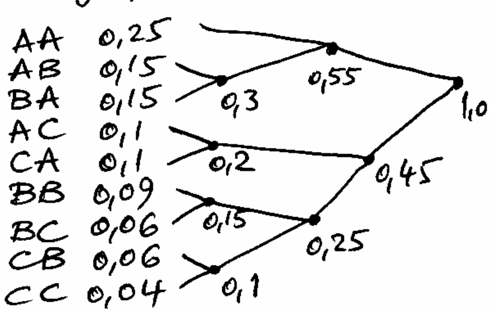


$$C = 1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p) =$$

$$= 1 + 0{,}05\log_2 0{,}05 + 0{,}95\log_2 0{,}95 = 0{,}7136 \text{ bits/simb.}$$

$$\Rightarrow r < 100\,\frac{0{,}7136}{1{,}4855} = 48{,}04 \text{ letras/s}$$

b) Agrupando as letras A, B e C duas a duas obtemos 9 novos símbolos:



n_i
2
3
3
3
3
4
4
4
4

$$\Rightarrow \bar{N} = \frac{\sum n_i p_i}{2} = \frac{2\times0{,}25+3\times0{,}15+\ldots}{2}$$

$$= 1{,}5 \text{ díg. bin./letra da fonte}$$

$$\text{Eficiência} = \frac{H(x)}{\bar{N}} = 99{,}03\%$$

8

3. $P_{end} = \sum_{i=0}^{n} A_i \, p^i (1-p)^{n-i} \ll P_e = 10^{-8}$

O caso pior ocorre quando a probabil. de erro no canal

é $p = 0{,}5 \Longrightarrow P_{end} \ll \sum_{i=0}^{n} A_i \, 0{,}5^i (1-0{,}5)^{n-i} = \underbrace{0{,}5^n}_{2^{-n}} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} A_i}_{2^k} = 2^{-(n-k)}$

$2^{-(n-k)} \ll 10^{-8} \Longrightarrow n-k \geqslant 27$

$\left(\begin{array}{l} \text{Outros valores de } P_e: \\ P_e = 10^{-6} \Longrightarrow n-k \geqslant 20 \\ P_e = 10^{-7} \Longrightarrow n-k \geqslant 24 \end{array} \right)$