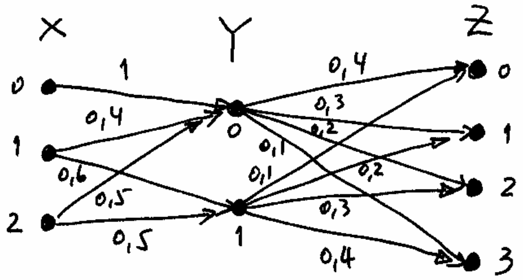
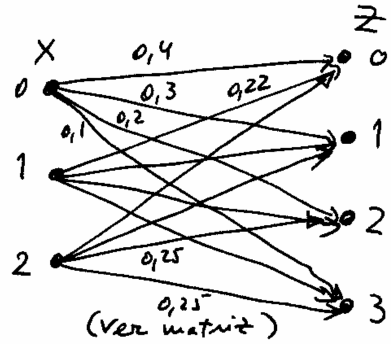
Teoria da Informação (2001-2002)
Exame de recurso (24-7-02)

5.



$\Longrightarrow$



$$[Z|X] = [Y|X] \cdot [Z|Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}22 & 0{,}24 & 0{,}26 & 0{,}28 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & \boxed{0{,}25} & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

b) $P(Z=2 \mid X=2) = 0{,}25$

a) $H(Y|X) = \sum_{i=0}^{2} p(x_i)\, H(Y|x_i) = \frac{1}{3} \Big[\underbrace{H(1;0)}_{0} + \underbrace{H(0{,}4;0{,}6)}_{0{,}971} + \underbrace{H(0{,}5;0{,}5)}_{1} \Big]$

$= \frac{1}{3} \cdot 1{,}971 = 0{,}657$

c) Pretende-se a informação mútua $I(X;Z)$.

$I(X;Z) = H(Z) - H(Z|X)$

$P(z_j) = \sum_{i=0}^{2} p(x_i)\, P(z_j|x_i) \Longrightarrow$
$P(z_0) = 0{,}29$
$P(z_1) = 0{,}2633$
$P(z_2) = 0{,}2367$
$P(z_3) = 0{,}21$

$\Rightarrow H(Z) = H(0{,}29;0{,}2633;0{,}2367;0{,}21) = 1{,}9897$

$H(Z|X) = \sum_i p(x_i)\, H(Z|x_i) = \frac{1}{3}\Big[H(1.^a \text{ linha de } [Z|X]) + H(2.^a \text{ linha}) +$
$+ H(3.^a \text{ linha})\Big] = 1{,}9469$ $(< H(Z)$, claro!$)$

Assim, $I(X;Z) = 1{,}9897 - 1{,}9469 = 0{,}0428$

d) $I(X;Z) = H(Z) - H(Z|X) = H(X) - \underbrace{H(X|Z)}_{\text{equivocação}}$

$$\Rightarrow H(X/Z) = \underbrace{H(X)}_{\log_2 3 = 1,585} - H(Z) + H(Z|X) = 1,585 - 1,9897 + 1,9469 =$$

$$= \underline{\underline{1,5421}}$$

2. fdp do ruído: $p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{n^2}{2\pi\sigma_n^2}}$

$Y = X + N$

$$H(X|N) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{p(u,n)}_{} \log_2 p(u/n)\, du\, dn$$

$p(u).p(n)$ (porque são independentes)

$$p(u/n) = p(u)$$

Logo, $H(X/N) \equiv H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(u) \log_2 p(u)\, du = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma_u^2)$

(porque X é gaussiana)

Neste caso $\sigma_u^2 = 0,9368 \Rightarrow H(X/N) = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \times 0,9368) =$

$$= \frac{1}{2} \log_2 16 = 2 \text{ bits/simb.}$$

Repare-se que não precisamos de usar $\sigma_n = 700$ mV.

3. (9,6) cíclico. Qual o polinómio gerador? De acordo c/ a tabela de factorização $p^n + 1 = p^9 + 1 = (p+1)(p^2+p+1)(p^6+p^3+1)$

logo, $g(p) = (p+1)(p^2+p+1) = p^3 + 1$ (único factor de grau 3).

a) Linha $\underline{\underline{i}}$ de P: $p^{n-i} \bmod g(p)$

$\Rightarrow$ Linha 1 : p^2
" 2 : p
" 3 : 1
" 4 : p^2
" 5 : p
" 6 : 1

$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Limite de Singleton : $d_{min} \leq n-k+1 = 4$

Limite de Plotkin : $d_{min} \leq n \dfrac{2^{k-1}}{2^k-1} = 9\times \dfrac{32}{63} = 4,57 \to 4$

c) Se $g(p)=p^3+1$ gera o código $(18,15)$ quer dizer que $p^{18}+1$ é múltiplo de $g(p)$. Como p^9+1 é também múltiplo de $g(p)$ então $(p^9+1) \bmod g(p) = 0$, ou seja, o polinómio p^9+1 pertence ao código $(18,15)$. Como o seu peso é $\underline{\underline{2}}$ concluímos que $d_{min} = 2$.

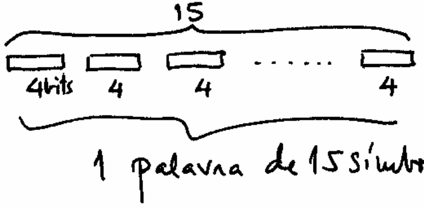
4. a) Golay aumentado $(24,12)$: $A(z) = 1+759z^8+2576z^{12}+759z^{16}+z^{24}$.
Existem $\binom{24}{8} = 735471$ padrões de 8 erros, $\binom{24}{12} = 2704156$ padrões de 12 erros, $\binom{24}{16} = 735471$ padrões de 16 e $\binom{24}{24} = 1$ padrão de 24 erros. Destes, alguns são palavras de código. Em concreto, existem $A_8 = 759$ padrões de 8 erros que fazem parte do código. De igual modo para $A_{12} = 2576$, $A_{16} = 759$ e $A_{24} = 1$. Estes não são detectados, os restantes são-no.
O nº de padrões de erro de peso $\underline{\underline{e}}$ detectáveis é, portanto:

e	Nº padrões detectáveis
4, 5, 6, 7	Todos $(\Rightarrow \binom{24}{e})$
8	$\binom{24}{8} - A_8 = 734712$
9, 10 e 11	Todos
12	$\binom{24}{12} - A_{12} = 2701580$
13, 14, 15	Todos
16	$\binom{24}{16} - A_{16} = 734712$
17, 18, ... 23	Todos
24	$\binom{24}{24} - A_{24} = 0$

Respondendo ao que se pede :

e	Padrões detectáveis
10	$\binom{24}{10} = 1\,961\,256$
12	2 701 580
14	$\binom{24}{14} = \binom{24}{10} = 1\,961\,256$
16	734 712
24	0

b) RS (15,11), $A_6 = 825825$ palavras de 15 símbolos com seis bits "1" (os restantes $15 \times 4 - 6 = 54$ bits são "0").



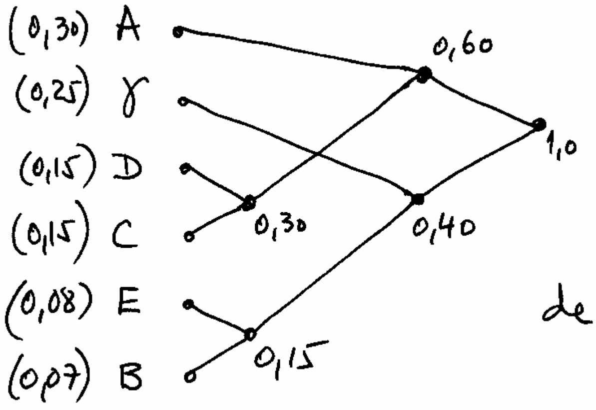
No total existem $(2^4)^{15} = 16^{15}$ sequências de 15 símbolos possíveis.

Aquelas 825825 palavras são potenciais padrões de erro não-detectáveis. Assim, no universo de 16^{15} palavras a probabilidade de esses seis erros não serem detectados é

$$\frac{825\,825}{16^{15}} = 7{,}1 \, . \, 10^{-13}.$$

1- a) $H(0{,}3 ; 0{,}07 ; 0{,}15 ; 0{,}15 ; 0{,}08 ; 0{,}25) = 2{,}40$ bits/símbolo

b) Huffman de variância mínima:

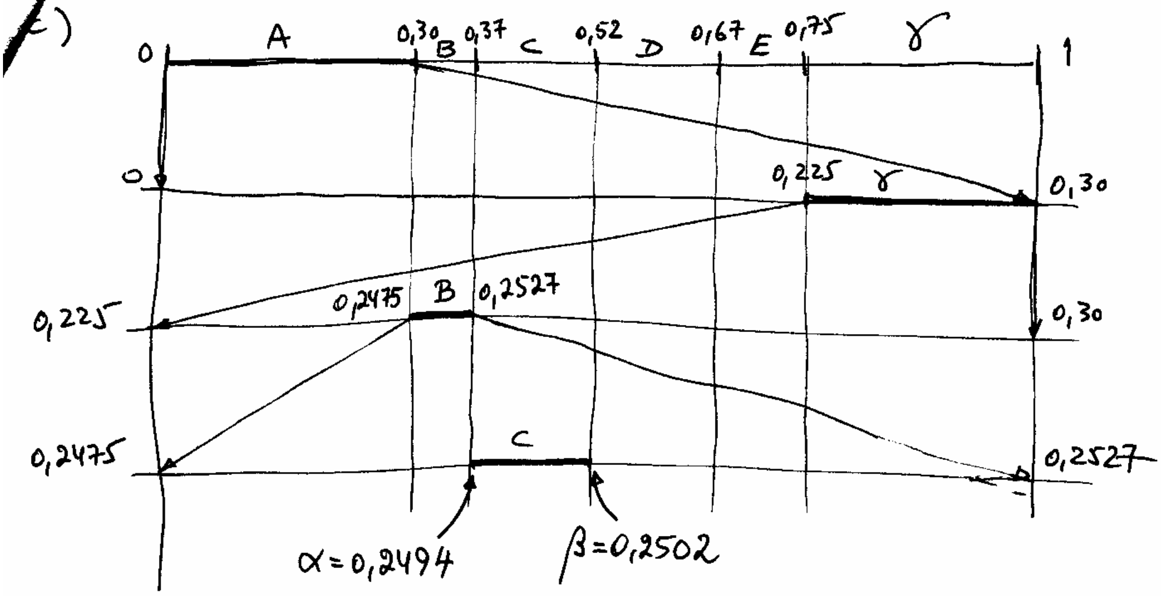


$n_A = 2$
$n_\gamma = 2$
$n_D = 3 = n_C = n_E = n_B$

A sequência AγBC precisa de $2+2+3+3 = 10$ bits.

(com codific. de variância não-mínima são precisos $2+2+4+3=11$ bits).

c)



$L = \beta - \alpha = 7{,}875 \cdot 10^{-4} \Rightarrow t = \lceil -\log_2 L \rceil = 11$

$\alpha \le \frac{u}{2^t} < \beta \Rightarrow 510{,}86 \le u < 512{,}47 \Rightarrow u = \begin{cases} 511 \\ 512 \end{cases}$ ← escolhe-se o valor par.

Fracção diádica com o menor denominador no intervalo $[\alpha ; \beta[$:

$\frac{u}{2^t} = \frac{512}{2^{11}} = \frac{1}{4} = 0{,}01 \Rightarrow$ palavra binária: 01

Resposta: qualquer valor do intervalo $[0{,}2494 ; 0{,}2502[$ serve, embora a representação binária possa não ser a mais curta.

d) A sequência binária mais curta corresponde ao valor real $\frac{1}{4} = 0{,}25 \Rightarrow 01$.

6

a) Basta somar as duas primeiras linhas de G:

$$\begin{array}{l} 0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ \hline 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \end{array} \leftarrow \text{palavra de código}$$

b) Olhando para G concluímos já que $d_{min} \leqslant 4$. Passemos a H:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Não há linhas nulas nem iguais

$\Rightarrow d_{min} \geqslant 3$

Qualquer linha tem peso ímpar

$\Rightarrow$ não há nenhum conjunto de 3 linhas cuja soma seja zero

$\Rightarrow d_{min} \geqslant 4$

De G concluímos finalmente que $d_{min} = 4$.

d) A síndrome 1011 é igual à 6ª linha de H. Também é igual à soma das linhas 1, 2 e 5, ou à soma de outras combinações. A situação mais provável destas todas é a primeira, correspondente à ocorrência de um erro no 6º bit da palavra de código. Logo,

$$E = [0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0].$$

c) Existem 16 "coset leaders" dos quais

$\alpha_0 = 1$

$\alpha_1 = 8$

$\alpha_2 = 7$ (dos 70 possíveis)

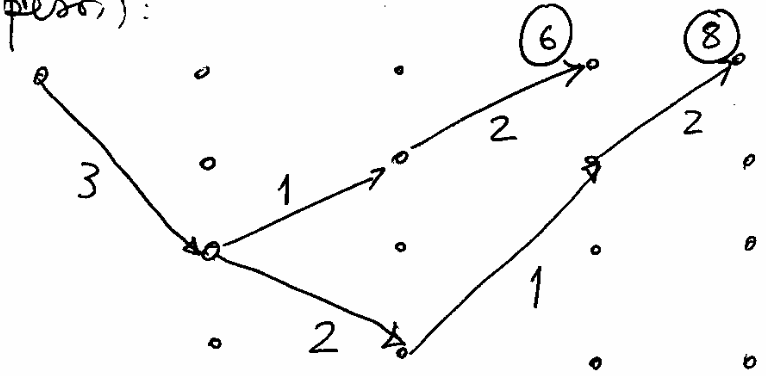
$$P_{enc} = 1 - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, p^i (1-p)^{n-i} = 1 - \left[(1-p)^8 + 8\,p(1-p)^7 + 7\,p^2(1-p)^6\right] =$$

$$= 2{,}0999 \cdot 10^{-9} \quad (\text{com } p = 10^{-5})$$

$(= 2{,}099 \cdot 10^{-7}$ se $p = 10^{-4}$ e $2{,}093 \cdot 10^{-5}$ se $p = 10^{-3})$

7- a) Taxa do código : 1/3

b) Distância livre? Na treliça vemos os seguintes percursos mais curtos de $\underline{\underline{a}}$ a $\underline{\underline{a}}$ (com os respectivos pesos):



A distância livre é $\underline{\underline{6}}$.

c) Segundo a folha anexa:

X = 0 1 1 0 0 ....

Y = 000 111 101 001 011 ....

↑ Erro em Z

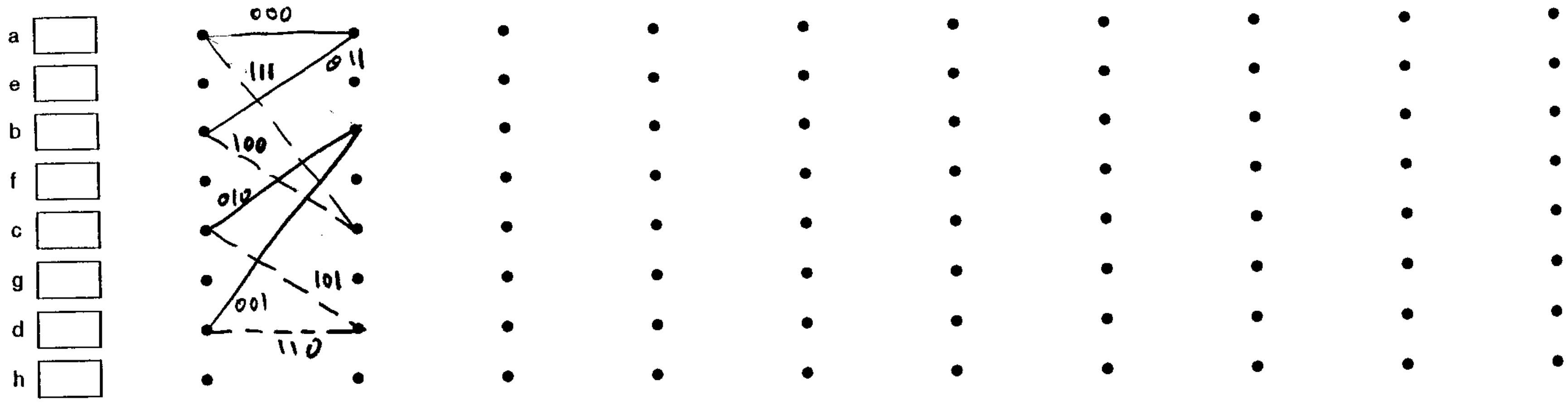
↑ erro em Z

↑ erro em Z

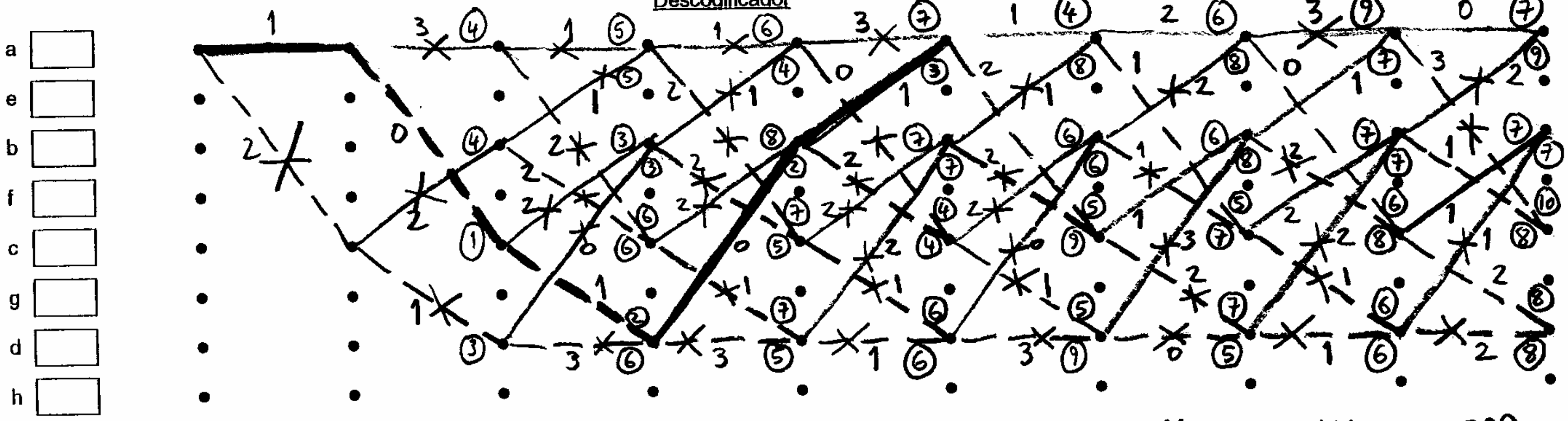
Teoria da Informação

Nome ____________________ **Tipo de descodificação** ____________ **Data** ________

Codificador



Descodificador



Sequência recebida 001 111 001 001 111 001 110 111 000 000 (Cauda)

Mensagem original estimada

0	1	1	0	0									

Seq. Enviada 000 111 101 001 011 ...