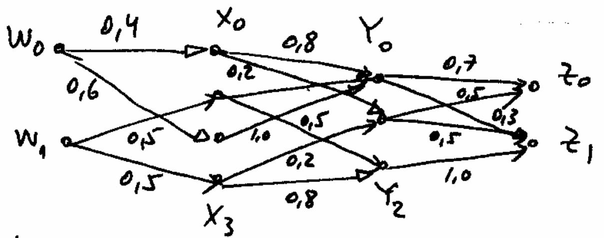
/

Teoria da Informação (2002-2003)

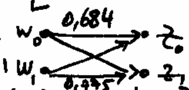
Exame de 1ª chamada (25-6-03)

4-



c) Matriz de probabil. do canal equivalente é igual ao produto das matrizes intermédias:

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,684 & 0,316 \\ 0,225 & 0,775 \end{bmatrix}$$

O diagrama do canal equivalente é, portanto, 

a) $H(X|W) = \sum_{i=0}^{1} P(w_i) H(X|w_i) = P(w_0) H(X|w_0) + P(w_1) H(X|w_1)$

$H(X|w_0) = H(0,4;\, 0;\, 0,6;\, 0) = 0,971$

$H(X|w_1) = H(0;\, 0,5;\, 0;\, 0,5) = 1$ bit/simb.

$\Rightarrow H(X|W) = 0,6 \times 0,971 + 0,4 \times 1 = 0,9826$ bits/simb.

b) $I(W;X) = H(W) - H(W|X) = H(X) - H(X|W)$ ← calculado em a).

$P(x_0) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$
$P(x_1) = 0,4 \times 0,5 = 0,20$
$P(x_2) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$
$P(x_3) = 0,20$

$\Rightarrow I(W;X) = H(0,24;\, 0,2;\, 0,36;\, 0,2) - H(X|W) =$
$= 1,9535 - 0,9826 = 0,9710$ bits/simb.

1-

$P(a_1) = 0,2$
$P(a_2) = 0,01$
$P(a_3) = 0,25$
$P(a_4) = 0,30$
$P(a_5) = 0,24$

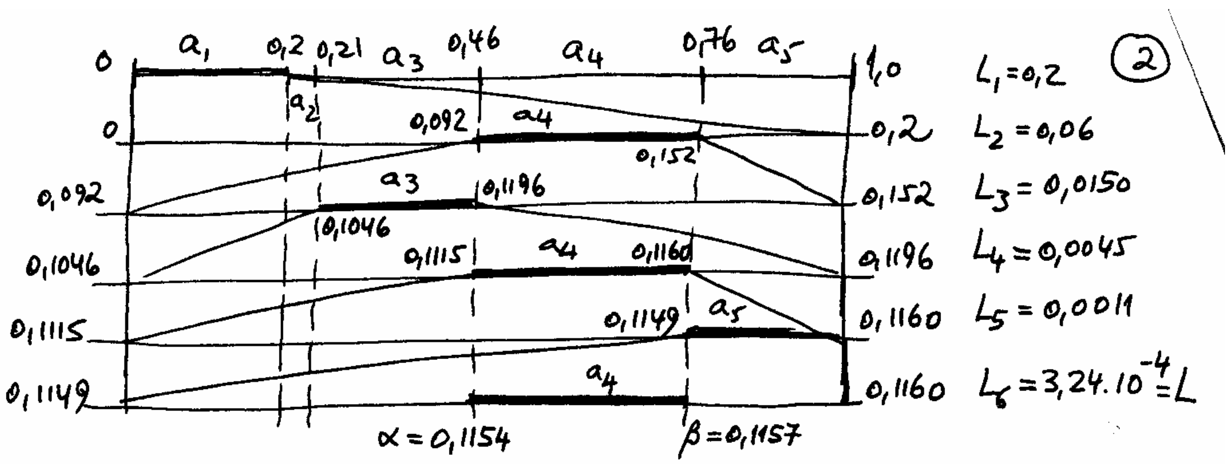
$\Rightarrow$ Entropia da fonte $= H(A) = H(0,2;\, 0,01;\, 0,25;\, 0,3;\, 0,24) =$
$= 2,046$ bits/simb

a) Código 1 : $\overline{N}_1 = 2,21 \Rightarrow$ eficiência $= \frac{H(A)}{\overline{N}_1} = 0,9258$ (92,6 %)

Código 2 : $\overline{N}_2 = 1,92 \Rightarrow$ eficiência $= \frac{H(A)}{\overline{N}_2} = 1,0657$ (>1 !!)

Porém, o cód. 2 não é aconselhável pois não é unicamente descodificável. O código 1 é melhor, claro!

(2)



b_1) O número real pretendido pertence ao intervalo semi-aberto $[0,1154 \,;\, 0,1157[$

b_2) Fração diádica. $L = \beta - \alpha = 3,24.10^{-4}$

$t = \lceil -\log_2 L \rceil = 12$

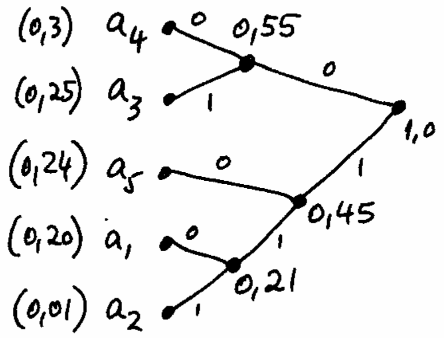
$\alpha \leq \frac{u}{2^t} < \beta \Rightarrow u \left\{ \begin{matrix} 473 \\ 474 \leftarrow \text{escolhe-se o nº par} \end{matrix} \right. \Rightarrow \frac{u}{2^t} = \frac{474}{2^{12}} = \frac{237}{2048} \longrightarrow \underbrace{00011101101}_{11 \text{ bits}}$

b_3) Sequência binária codificada

474	948	1896	3792	3488	2880	1664	3328	2560	1024	2048
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1

É esta a sequência binária codificada.

c)



00 ← a_4
01 ← a_3
10 ← a_5
110 ← a_1
111 ← a_2

Logo, $a_1 a_4 a_3 a_4 a_5 a_4 \longrightarrow 1100001001000$ (13 bits)

5 - Cód. cíclico sistemát. (8,5).

Consulta a tabela de factorização de p^n+1 vemos que $p^8+1=(p+1)^8$. Há um único factor de p^8+1 com grau $8-5=3$ e esse é o polinómio gerador: $g(p)=(p+1)^3=p^3+p^2+p+1$.

a) Mensagem 10101 $\Longrightarrow X(p)=p^4+p^2+1$

Polinómio de código: $Y(p)=p^{n-k}X(p)+p^{n-k}X(p) \bmod g(p)$

$$p^{n-k}X(p)=p^3X(p)=p^7+p^5+p^3$$

$$(p^7+p^5+p^3) \bmod (p^3+p^2+p+1)=p$$

Logo, $Y(p)=p^7+p^5+p^3+p \longrightarrow 10101010$

b) Sequência $Z(p)=p^6+p^2+p$

Síndrome $S(p)=Z(p) \bmod g(p)$

$\Longrightarrow S(p)=p \neq 0 \Longrightarrow$ A sequência não é uma palavra de código porque $S \neq 0$.

c)
$$G=\left[\begin{array}{ccccc|ccc}1&0&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&0&1&0\end{array}\right] \Longrightarrow H=\begin{bmatrix}101\\110\\011\\111\\010\\100\\010\\001\end{bmatrix}$$

linhas iguais $\Longrightarrow d_{min}=2$

Deveremos eliminar a 5ª linha de H para que o código encurtado tenha uma dist. min. de 3. Quanto à matriz G, deveremos eliminar a 5ª linha e a 5ª coluna. Logo,

$$G'=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

O código encurtado é obtido eliminando o 5º bit de informação.

6 - a) $g(p) = p^8 + p^6 + p^4 + p^2 + 1$

Este polinómio é factor de $p^n + 1 \Longrightarrow$ O resto da divisão de p^n por $g(p)$ dá 1:

```
1000000000 00   |101010101
101010101       |101
---------
    1010101 00
    1010101 01
    ----------
    0000000001
```

$\rightarrow$ Logo, $n = 10$

O código tem dimensões $n = 10$ e $k = 10 - \underbrace{8}_{\text{grau de } g(p)} = 2$

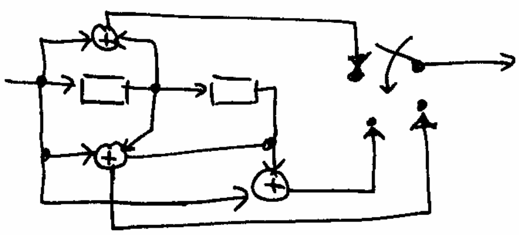
(Código (10,2))

b) Código CRC, $g(p) = p^{16} + p^{15} + p^2 + 1$. A trama corresponde ao polinómio $Z(p) = p^{31} + p^{30} + p^{17} + p^{16} + p^{13} + p^{11} + p^8 + p^5 + p^2 + 1$. Basta dividi-lo por $g(p)$: se der resto $\underline{0}$ não há erros detectados, se não der é porque a trama tem erros.

$$Z(p) \bmod g(p) = p^{13} + p^{11} + p^8 + p^5 \neq 0$$

Há erro(s) na trama.

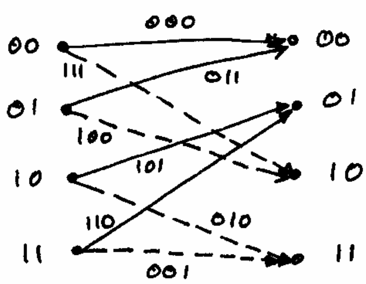
3 -



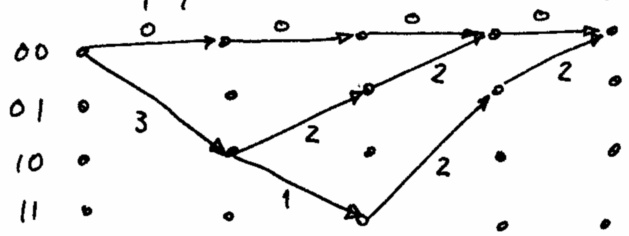
a) $G(D) = [1+D \quad 1+D^2 \quad 1+D+D^2] = [110 \quad 101 \quad 111] =$

$= [6 \quad 5 \quad 7]$

b)



c) Por inspecção visual temos os seguintes dois percursos



Os outros percursos que saem e voltam ao estado nulo têm pesos maiores $\Rightarrow d_f = 7$.

d) A treliça permite afirmar que existem dois anéis no diagrama de estados: um no estado 00 e outro no estado 11. Para que o codificador não seja catastrófico basta que a este último anel não corresponda uma saída nula. Neste caso a saída é 001 (ver alínea b) $\Rightarrow$ não é catastrófico!
Uma outra maneira de chegar à mesma conclusão: verificar que m.d.c. $(1+D \quad 1+D^2 \quad 1+D+D^2) = D^m$, $m \geq 0$.
(neste caso, m.d.c. $(\ldots) = 1$)

e) Mensagem: 10100....0
Olhando para a treliça concluímos que a seq. de saída é: $111\ 101\ 100\ .\ \underbrace{101\ 011\ 000}_{\text{Cauda}}\ 000\ 000 \ldots\ldots$

2. b) $\dfrac{E_b}{N_0} \geqslant \dfrac{2^{2R_c} - 1}{2R_c}$

Se $R_c = 1/3 \Rightarrow \dfrac{E_b}{N_0} \geqslant \dfrac{2^{2/3} - 1}{2/3} = 0{,}8811 \quad (-0{,}55\,dB)$